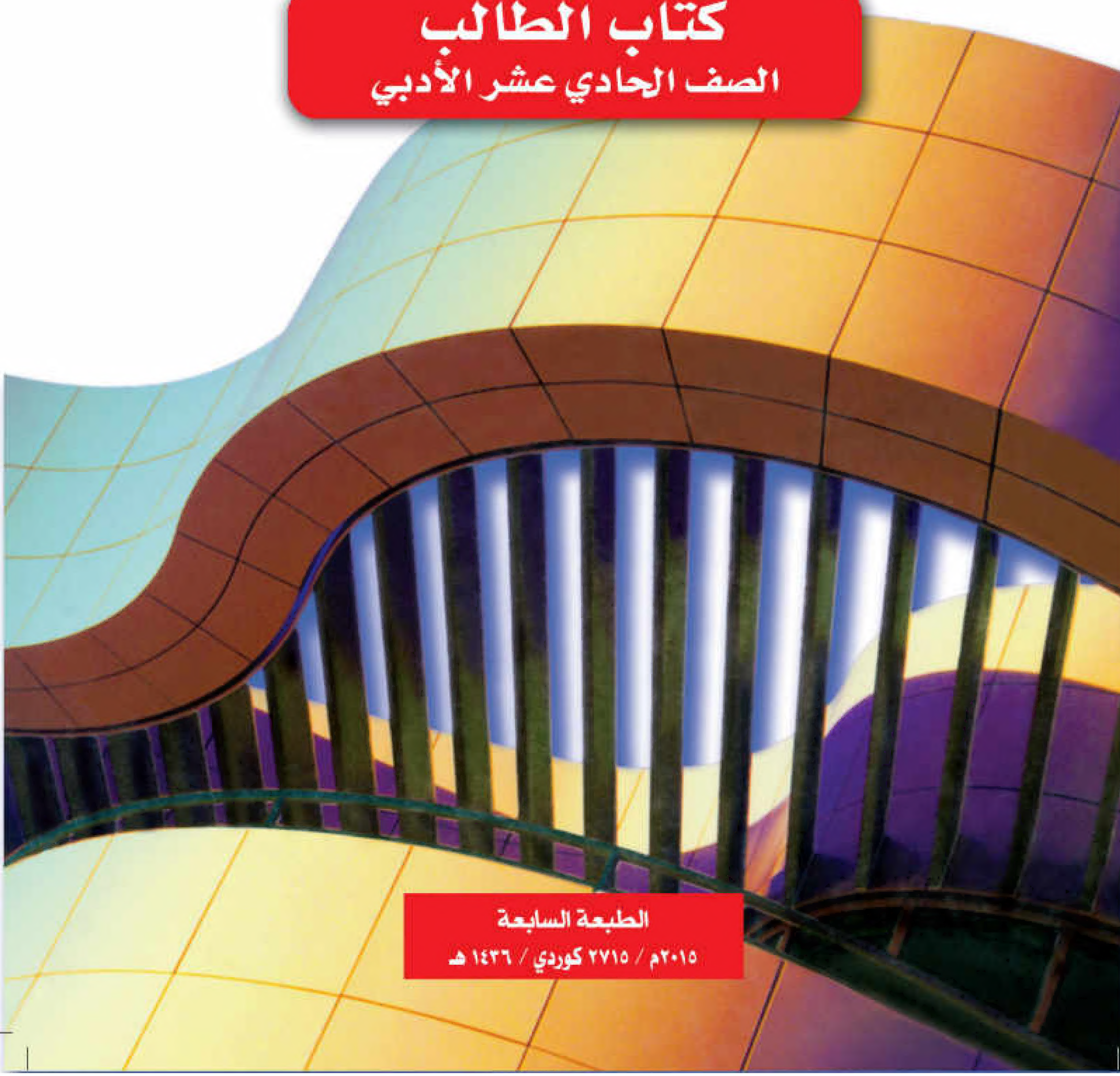
11

حكومة إقليم كوردستان ـ العراق
وزارة التربية ـ المديرية العامة للمناهج والمطبوعات

الرياضيات للجميع

كتاب الطالب

الصف الحادي عشر الأدبي



الطبعة السابعة
٢٠١٥م / ٢٧١٥ كوردي / ١٤٣٦ هـ

الأشراف الفني على الطبع

عثمان پيرداود كواز

آمانج اسماعيل عبدي

Content-Student-adabi-g11-13 2/12/15 12:39 PM Page 5

محتوى الكتاب

1 Statistics andProbability الإحصاء والاحتمال

2 Functions الدوال

3 Systems Of Linear Equations أنظمة المعادلات الخطية

4 أنظِمةُ المُتبايناتِ الخَطيَّة Systems of Linear Inequalities

5 المصفوفات Matrices

6 التفاضل Differential

الفصل 1

الإحصاء والاحتمال

Statistics and Probability

يُمكنك استعمال الإحصاء والاحتمال، لتحليل معطيات تتعلَّق بالانتظار في رتل واستنتاج خلاصات تتعلّق بمدة الانتظار.

الدروس

يُمكنك استعمال الإحصاء والاحتمال، لتحليل معطيات تتعلَّق بالانتظار في رتل واستنتاج خلاصات تتعلّق بمدة الانتظار.

مدة الانتظار المقدرة ابتداء من هذه النقطة، هي 4872 دقيقة

الدرس 1

مقاييس النزعة المركزية
Measures of central Tendency

الأهداف

- يجد قياسات النزعة المركزية لمجموعة معطيات

المفردات
Vocabulary

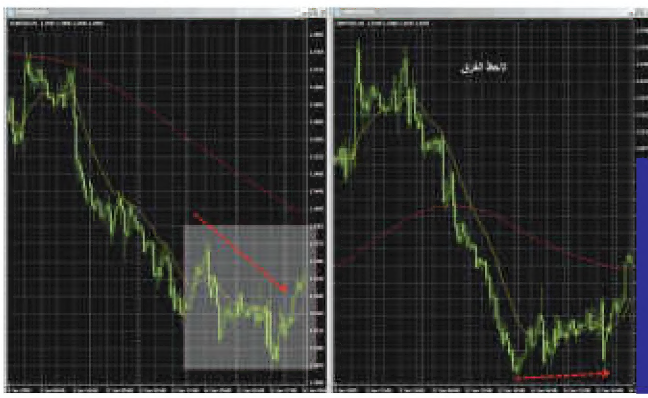
التكرار التراكمي الصاعد
Increasing cumulative frequency

التكرار التراكمي النازل
Decreasing Cumulative frequency

المتوسِّط
Mean

الوسيط
Median

المنوال
Mode



لماذا؟
يستعمل الإحصائيون قياسات النزعة المركزية، لتحليل المعطيات التي توفّرها ميادين العلوم والاقتصاد والاجتماع والإدارة.

تعلَّمت من قبل كيف تجد المتوسِّط والوسيط والمنوال لمجموعة معطيات، وهي قياسات إحصائية تساعد على وصف هذه المجموعة مركزيًّا.

تذكَّر

- أن المتوسِّط **Mean** قياس يُلخِّص مجموعة المعطيات. فأن تقول أن متوسِّط علامات طلاب الصف الحادي عشر في الرياضيات كان 70 من مئة، يدل على أن هذه العلامات كانت جيدة بالمجمل. لإيجاد المتوسِّط، اجمع معطيات المجموعة واقسِم المجموع على عدد المعطيات.
- أن الوسيط **Median** قياس يدل على مركز معطيات المجموعة بعد ترتيبها صعودًا أو نزولاً. فأن تقول أن وسيط علامات طلاّب الصف الحادي عشر في الرياضيات كان 65 من مئة يعني أن هذه العلامة تقسم العلامات التي حصل عليها الطلاب، بعد ترتيبها صعودًا أو نزولاً، إلى نصفين. لإيجاد الوسيط، ما عليك سوى ترتيب المعطيات صعودًا أو نزولاً والنظر إلى المُعطى الواقع في الوسط. إذا كان عدد المعطيات فرديًّا يكون هناك معطى واحد في الوسط. هذا المعطى هو وسيط المجموعة . أما إذا كان عدد المعطيات زوجيًّا، يكون هناك معطيان وسطيان. وسيط المجموعة هو متوسِّط هذين المعطيين.
- أن المنوال **Mode** قياس يُبيِّن القيم الأكثر تردُّدًا في مجموعة المعطيات. لإيجاد المنوال، أنشئ الجدول التكراري لمجموعة المعطيات، وهو جدول من صفين. يضم صفه الأول معطيات المجموعة من دون تكرار، ويضم الصف الثاني، وتحت كل معطى، عدد المرات التي يتكرَّر فيها. المنوال هو المعطى الأكثر تكرارًا.
- أن لكل مجموعة معطيات متوسِّطًا وحيدًا ووسيطًا وحيدًا، وأن من الممكن أن يكون لها أكثر من منوال، أو لا يكون لها منوال على الإطلاق.

مثـــــال 1 إيجاد مقاييس النزعة المركزية

جِد المتوسِّط والوسيط والمنوال لمجموعة المعطيات: $\{8,2,3,4,2,5,3,4,5,2,3,4\}$

المتوسِّط: $\bar{x} = \frac{8+2+3+4+2+5+3+4+5+2+3+4}{12} = \frac{15}{4} = 3.75$

الوسيط: ابدأ بترتيب المعطيات صعودًا، مثلاً. $2,2,2,3,3,\boxed{3,4},4,4,5,5,8$. تجد أن عدد المعطيات زوجي، خذَ المعطيَيْن الواقعَين في الوسط وهما 3 وَ 4، واحسب متوسطَّهما. هذا المتوسِّط هو $3.5 = \frac{3+4}{2}$. وسيط المجموعة هو 3.5 .

المنوال: أنشئ الجدول التكراري لمعطيات المجموعة:

القيمة	2	3	4	5	8
التكرار	3	3	3	2	1

للمجموعة 3 منوالات، هي 2 وَ 3 وَ 4.

حـــاولْ **جد المتوسّط والوسيط والمنوال لكل مجموعة معطيات.**

1 أ $\{6,9,3,8\}$ **1** ب $\{2,5,6,2,6\}$

عند تحليل معطيات إحصائية مُجمّعة في فئات، غالبًا ما تحتاج إلى ترتيب هذه المعطيات صعودًا أو نزولاً، وتحديد مجاميعها الجزئية. يستعمل الإحصائيون لهذه الغاية **الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل.**

الجدول التكراري التراكمي الصاعد هو جدول من 3 أعمدة، يضم الأول منها الفئات مرتَّبة صعودًا، ويضم الثاني، ومقابل كل فئة، تكرارها، بينما يضم الثالث مجموع تكرار هذه الفئة وتكرارات الفئات التي تسبقها.

الجدول التكراري التراكمي النازل هو جدول من 3 أعمدة يضم الأول منها الفئات مرتَّبة صعودًا، ويضم الثاني، ومقابل كل فئة، تكرارها، بينما يضم الثالث الفرق بين مجموع التكرارات ومجموع تكرارات الفئات التي تسبقها.

مثـــــال 2 إنشاء الجداول التكرارية التراكمية

يُبيّن الجدول توزيع أعضاء نادي الشطرنج في الحي الشرقي وفقًا لأعمارهم. أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل.

الفئةالعمرية	[10,12[	[12,14[	[14,16[	[16,18[	[18,20[	[20,22[
التكرار	30	40	50	60	40	20

أ التكرار التراكمي الصاعد

الفئة	التكرار	التكرار التراكمي الصاعد
[10,12[	30	30
[12,14[	40	70
[14,16[	50	120
[16,18[	60	180
[18,20[	40	220
[20,22[	20	240

ب التكرار التراكمي النازل

الفئة	التكرار	التكرار التراكمي النازل
[10,12[	30	240
[12,14[	40	210
[14,16[	50	170
[16,18[	60	120
[18,20[	40	60
[20,22[	20	20

يساعدك الجدول التكراري التراكمي الصاعد على الإجابة عن أسئلة مثل: ما عدد الأعضاء الذين يقل عمرهم عن 20 سنة؟ ويساعد الجدول التكراري التراكمي النازل على الإجابة عن أسئلة مثل: ماعدد الأعضاء الذين لا يقل عمر كل منهم عن 20 سنة؟ وتساعد كتابة هذين الجدولين على الصورة المبينة في الجدولين أدناه على الإجابة على مثل هذه الأسئلة.

الفئة	التكرار	التكرار التراكمي الصاعد
أقل من 12	30	30
أقل من 14	40	70
أقل من 16	50	120
أقل من 18	60	180
أقل من 20	40	220
أقل من 22	20	240

الفئة	التكرار	التكرار التراكمي النازل
10 أو أكثر	30	240
12 أو أكثر	40	210
14 أو أكثر	50	170
16 أو أكثر	60	120
18 أو أكثر	40	60
20 أو أكثر	20	20

حــــاولْ أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل للمعطيات المجمَّعة في فئات، والتي يُبيّنها الجدول التالي:

الفئة	[30,40[	[40,50[	[50,60[	[60,70[	[70,80[
التكرار	5	10	15	12	8

لحساب متوسِّط مجموعة معطيات مجمَّعة في فئات، أنشئ جدولاً من صفّين يتضمّن أوّلهما مراكز مختلف الفئات، بينما يتضمن الثاني، وتحت كل مركز، تكرار الفئة التي يعود إليها المركز. ثم احسبْ متوسِّط الجدول التكراري الذي حصلت عليه. كذلك حدِّدْ، في المعطيات المجمَّعة إلى فئات، الفئة أو الفئات المتوالية، باعتبارها الفئة أو الفئات الأكثر تكرارًا. غير أن تحديد وسيط معطيات مجمَّعة في فئات ليس بالأمر السهل. سوف تتعلّم في هذا الدرس كيف تقوم بذلك بيانيًّا وجبريًّا.

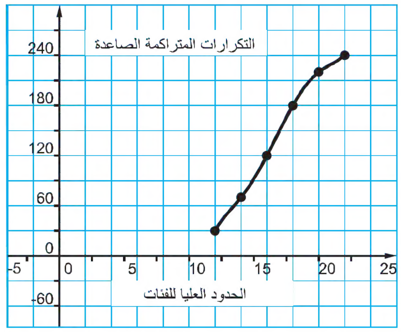
لإيجاد الوسيط بيانيا، مثِّل الجدول التكراري التراكمي الصاعد ببيان يُسمّى **المنحني التراكمي الصاعد**، ومثِّل الجدول التكراري التراكمي النازل ببيان يُسمّى **المنحني التراكمي النازل**. عندئذ يكون وسيط مجموعة المعطيات الإحداثي الأول لنقطة تقاطع البيان الذي رسمته مع المستقيم الأفقي $y=m$ ، حيث يمثِّل m نصف التكرار التراكمي الأكبر.

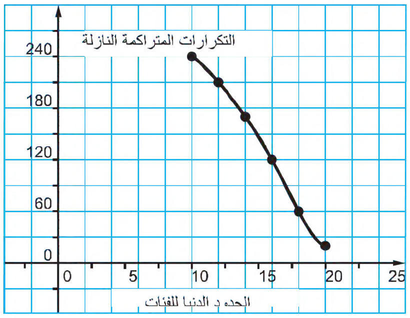
لإنشاء **المنحني التراكمي الصاعد**، خصِّص المحور الأول للحدود العليا للفئات، والمحور الثاني لتكراراتها، بحيث تتمثَّل كل فئة بنقطة: إحداثيّها الأول هو حدّها الأعلى وإحداثيّها الثاني هو تكرارها. ثم ارسم منحنيًا مناسبًا يصل بين النقاط.

لإنشاء **المنحني التراكمي النازل**، خصِّص المحور الأول للحدود الدنيا للفئات، والمحور الثاني لتكراراتها، بحيث تتمثَّل كل فئة بنقطة: إحداثيّها الأول هو حدها الأدنى، وإحداثيّها الثاني هو تكرارها. بعد ذلك، ارسم منحنيًا مناسبًا يصل بين النقاط.

مثـــــال 3 **إنشاء المنحنيات التراكمية**

أنشئ المنحني التراكمي الصاعد والمنحني التراكمي النازل لمعطيات المثال 2.





حـــاولْ أنشئ المنحنى التراكمي الصاعد والمنحنى التراكمي النازل للمعطيات المجمَّعة في فئات، والتي يُبيِّنُها الجدول التالي:

الفئة	$[20,25[$	$[25,30[$	$[30,35[$	$[35,40[$	$[40,45[$	$[45,50[$	$[50,55[$	$[55,60[$
التكرار	2	4	5	7	12	8	7	5

سوف تستعمل الآن المنحنى التراكمي الصاعد أو المنحنى التراكمي النازل لتحديد وسيط مجموعة معطيات مجمَّعة في فئات. قم، من أجل ذلك، بالخطوات التالية:

1. إنشاء الجدول التكراري التراكمي الصاعد أو النازل.
2. إنشاء المنحنى التراكمي الصاعد أو النازل.
3. إنشاء المستقيم $y=m$ حيث يمثِّل m نصف التكرار التراكمي الأكبر.
4. تحديد الإحداثي الأول لنقطة تقاطع المنحنى التراكمي الصاعد أو النازل مع المستقيم.

مثـــــال 4 تحديد الوسيط بيانيًا

جِد الوسيط للمعطيات التالية

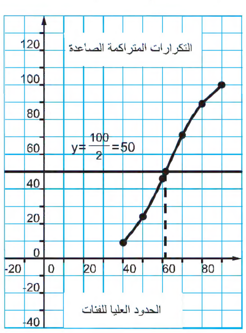
الفئة	$[30,40]$	$[40,50]$	$[50,60]$	$[60,70]$	$[70,80]$	$[80,90]$
التكرار	9	15	22	25	18	11

الجدول التكراري التراكمي الصاعد

الفئة	التكرار	التكرار التراكمي الصاعد
$[30,40]$	9	9
$[40,50]$	15	24
$[50,60]$	22	46
$[60,70]$	25	71
$[70,80]$	18	89
$[80,90]$	11	100

يبدو أن الوسيط يساوي تقريبًا 61.

البيان التراكمي الصاعد والمستقيم $y=m$



حــــاولْ جِد الوسيط للمعطيات التالية:

الفئة	$[40,50[$	$[50,60[$	$[60,70[$	$[70,80[$	$[80,90[$	$[90,100[$
التكرار	30	50	80	100	70	10

يُمكنك أيضًا أن تحدِّد الوسيط لمجموعة معطيات مجمَّعة في فئات باستعمال الجبر. للقيام بذلك:

1. أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد.

2. حدِّد الفئة التي ينتمي إليها نصف التكرار التراكمي الأخير. تُسمّى هذه الفئة **الفئة الوسيطة**.

3. احسب الوسيط M باستعمال القانون:

$$M = A + \left(\frac{\frac{\sum F_1}{2} - F_2}{F_3} \right) \times L$$

حيث يمثِّل:

- A الحد الأدنى للفئة الوسيطية.
- $\frac{\sum F_1}{2}$ التكرار التراكمي الأكبر.
- F_2 التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الفئة الوسيطية.
- F_3 تكرار الفئة الوسيطيه.
- L مدى الفئة.

مثـــــال 5 **تحديد الوسيط جبريًا**

جِد الوسيط لمعطيات المثال 4.

الحل: أنشئ الجدول التكراري المتجمع الصاعد

الفئات	التكرار F	التكرار المتجمع الصاعد F'
$[30,40[$	9	9
$[40,50[$	15	24
$[50,60[$	22	46
$[60,70[$	25	71
$[70,80[$	18	89
$[80,90[$	11	100
المجموع	$\sum F = 100$	

$$\sum \frac{F}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

- وهي رتبة الوسيط في العمود الثالث بين 71 و 46. أي أن الحد الأدنى للفئة الوسيطية
- $A = 60$
- $F_2 = 46$ التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الفئة الوسيطية
- $F_3 = 25$ تكرار الفئة الوسيطية.
- $L = 10$ طول الفئة.

ينتج من ذلك: $M = 60 + \left(\frac{50-46}{25}\right) \times 10 = 61.6$

تؤكِّد هذه النتيجة معقولية جواب المثال السابق (61 تقريبًا) الذي تم تحديده بيانيًّا.

حــــاولْ جِد جبريًّا وسيط المعطيات التالية:

الفئة	$[12,15[$	$[15,18[$	$[18,21[$	$[21,24[$	$[24,27[$
التكرار	30	50	80	100	70

التمارين

التواصل في الرياضيات

1 أيّ من مقاييس النزعة المركزية الثلاثة لمجموعة من المعطيات مجمَّعة في فئات، هو الأصعب تحديدًا؟ وضِّح جوابك.

2 افترض أنك حذفت من مجموعة المعطيات الفئة الأولى والفئة الأخيرة، هل يتغيّر الوسيط؟ علِّل جوابك بإعطاء مثال.

3 اكتب مجموعة معطيات غير مجمعَّة، حيث المتوسِّط والوسيط متساويان.

تمارين موجّهة

جد المتوسط والوسيط والمنوال لكل مجموعة معطيات.

4 $\{5,7,4,7,6,7\}$

5 $\{10,14,18,22,26\}$

6 أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل العائدَيْن إلى المعطيات التالية:

الفئة	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[
التكرار	11	16	19	14	5

7 أنشئ المنحني التراكمي الصاعد والمنحني التراكمي النازل العائدَيْن إلى المعطيات التالية:

العمر	[8,10[	[10,12[	[12,14[	[14,16[	[16,18[	[18,20[
التكرار	80	110	100	60	30	20

8 يتضمّن الجدول أدناه علامات 24 طالبًا في امتحان مادة الرياضيات. جِد بيانيًّا قيمة تقريبيَّة للوسيط.

الفئة	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[
التكرار	2	6	3	1	3	5	4

9 جد جبريًّا متوسِّط مجموعة المعطيات التالية:

العمر	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[
التكرار	11	16	19	14	5

تمارين وتطبيقات

جِد المتوسِّط والوسيط والمنوال لكل مجموعة معطيات.

10 $\{4,16,25,9,36,49\}$

11 $\{5,10,15,20,25\}$

12 أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل العائدين إلى المعطيات التالية:

الفئة	[28,30[	[30,32[	[32,34[	[34,36[	[36,38[	[38,40[
التكرار	2	3	9	12	1	5

13 أنشئ المنحني التراكمي الصاعد والمنحني التراكمي النازل، العائدَيْن إلى المعطيات التالية:

العمر	[30,35[	[35,40[	[40,45[	[45,50[	[50,55[	[55,60[
التكرار	80	110	100	60	30	20

14 يتضمن الجدول أدناه أعمار 275 عامل في أحد المصانع. جِد بيانيًّا قيمة تقريبية للوسيط.

الفئة	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[	[45,50[
العدد	45	65	75	44	34	12

15 يُبيّن الجدول أدناه متوسِّط استهلاك الشخص الواحد للبيض في إحدى المدن خلال فصل الشتاء، بالاستناد إلى استقصاء شمل 380 شخصًا. جِد الوسيط جبريًّا.

الفئة	[3,7[	[7,11[	[11,15[	[15,19[	[19,23[
التكرار	10	100	200	50	20

16 **تفكير ناقد** تعلَّمت أن القيمة التقريبية المقبولة لوسيط مجموعة، تتألّف من عدد زوجي من المعطيات غير المجمَّعة، هي متوسِّط القيمتَيْن الوسطيتَيْن. هل يُعدّ متوسِّط الحد الأعلى والحد الأدنى للفئة الوسيطة قيمة تقريبية مقبولة لوسيط مجموعة من المعطيات المجمَّعة في فئات؟ استعمل معطيات المثال 5 لدعم جوابك.

17 يُبيّن الجدول أدناه درجات طلاب الصف الحادي عشر في اختبار الرياضيات للفصل الأول.

80	60	90	20	65	40	60	35	70	35
65	35	70	45	80	65	50	60	15	30
35	15	40	10	20	20	70	55	85	40

أ) أنشئ جدولاً تكراريًّا بتجميع معطيات الجدول في فئات مدى كل منها 10، بما فيها الفئة [0,10[.

ب) أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل للمعطيات المجمَّعة.

ج) جد متوسِّط هذه المعطيات قبل التجميع وبعده. قارن بين المتوسِّطَيْن.

د) حدِّد المنوال أو المنوالات قبل تجميع المعطيات، وحدِّد الفئة أو الفئات المنوالية بعد التجميع.

هـ) جِد وسيط هذه المعطيات قبل التجميع وبعده. قارن بين الوسيطَيْن.

18 فيما يلي الأطوال بالسنتيمتر لطلاب الصف الحادي عشر:

179; 187; 181; 175; 175; 173; 172; 172; 175; 169; 167; 164; 171
173; 177; 178; 175; 185; 181; 172; 171; 177; 175; 175; 173; 178
168; 172; 174; 182; 178; 167; 168; 172; 174

أ أنشئ جدولاً تكراريًّا بتجميع معطيات الجدول في فئات مدى كل منها 5cm.

ب أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل للمعطيات المجمَّعة.

ج جد متوسط هذه المعطيات قبل التجميع وبعده. قارن بين المتوسِّطَيْن.

د حدِّد المنوال أو المنوالات قبل تجميع المعطيات وحدد الفئة أو الفئات المنوالية بعد التجميع.

هـ جِد وسيط هذه المعطيات قبل التجميع وبعده. قارن بين الوسيطَيْن.

نظرة إلى الوراء

19 يُظهر الجدول المقابل درجات طلاب الصف الحادي عشر في اختبار الرياضيات. جِد:

أ العلامة العليا.

ب العلامة الدنيا.

ج متوسِّط العلامات.

د وسيط العلامات.

هـ منوال العلامات.

85	75	96	88	72
90	78	87	80	98
93	88	82	87	80
83	98	97	84	92

نظرة إلى الأمام

20 يُبيِّن الجدول المقابل النقاط التي سجَّلها لاعبان في فريق كرة السلَّة في 5 مباريات.

أ جد متوسِّط عدد النقاط في المباراة التي سجَّلها كل لاعب.

ب أي من اللاعبين كان أكثر ثباتًا في تسجيل النقاط؟ علِّل جوابك.
هل تساعدك معرفة متوسِّط النقاط لكل لاعب في المباراة على تحديد اللاعب الأكثر ثباتًا في تسجيل النقاط؟ علِّل جوابك.

أمير	أحمد
20	15
20	25
18	30
22	10
20	20

الدرس 2

مقاييس التشتت Measures of Dispersion

الأهداف

- يجد قياسات التشتُّت لمجموعة معطيات جبريًّا، وباستعمال الحاسبة البيانية

المفردات Vocabulary

التباين Variance

الانحراف المعياري Standard deviation

لماذا؟

تعلمت في الدرس السابق أن قياسات النزعة المركزية لمجموعة معطيات توفر وصفا لها. إلا أن هذه القياسات لا تكفي لتقديم وصف واف للمعطيات. لذا يلجأ الإحصائيون إلى قياسات أخرى، هي قياسات التشتُّت.

إذا أخذت مجموعتي المعطيات $\{19,20,21\}$ وَ $\{0,20,40\}$ وحسبت المتوسِّط والوسيط لكل منهما. لوجدت أن لهما المتوسِّط نفسه والوسيط نفسه. غير أنهما مختلفتان: فمعطيات المجموعة الأولى تتجمَّع حول المتوسِّط، بينما تعاني معطيات الثانية من تشتُّت كبير.

تذكَّر

- أن **التباين Varience** قياس من قياسات التشتُّت يُرمز إليه بالرمز σ^2. التباين هو متوسِّط تربيعات الفروق بين مختلف المعطيات x_i ومتوسِّط معطيات المجموعة $\bar{x}$. أي أن:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2\right)$$

حيث يمثِّل n عدد المعطيات

- أن **الانحراف المعياري Standard deviation** قياس من قياسات التشتُّت، ويُرمز إليه بالرمز σ. الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين.
- أنه كلما صغرت قيمة الانحراف المعياري كانت المعطيات أقلّ تشتُّتًا، أي أنها تتجمّع بأكثريتها قرب المتوسِّط، مما يجعله أكثر تعبيرًا عن مجموعة المعطيات. وبالمقابل كلما صغرت قيمة الانحراف المعياري كانت المعطيات أكثر تشتُّتًا، وهي تتباعد عن المتوسِّط مما يجعله أقلّ تعبيرًا عن مجموعة المعطيات.

مثـــــال 1 إيجاد التباين والانحراف المعياري باستعمال الجبر

جد جبريًّا التباين والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات $\{14,13,16,9,3,7,11,12,11,4\}$

إذا عدت إلى تعريف كل من التباين والانحراف المعياري، تستنتج أن عليك القيام بالخطوات التالية:

1. حساب متوسِّط مجموعة المعطيات.
2. حساب تربيع الفرق بين المتوسِّط وكل معطى.

3. حساب مجموع التربيعات التي حصلت عليها، وقسمته المجموع على عددها، لتحصل على التباين.

4. حساب الجذر التربيعي الموجب للتباين.

ابدأ بحساب المتوسِّط. $\bar{x}=\frac{14+13+16+9+3+7+11+12+11+4}{10}=10$

أنشئ الجدول التالي:

المُعطى x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
14	4	16
13	3	9
16	6	36
9	-1	1
3	-7	49
7	-3	9
11	1	1
12	2	4
11	1	1
4	-6	36
	المجموع	162

احسب التباين: $\sigma^2=\frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)=\frac{162}{10}=16.2$

احسب الانحراف المعياري: $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{16.2}\approx 4.025$

حـــاولْ جد جبريًّا التباين والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات $\{0,3,1,1,0,5,1,0,3,0\}$

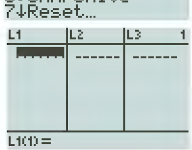
مثـــــال 2 إيجاد الانحراف المعياري باستعمال الحاسبة البيانية

جِد التباين والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات $\{14,13,16,9,3,7,11,12,11,4\}$ باستعمال الحاسبة البيانية:

ابدأ بإفراغ اللوائح Lists في الحاسبة البيانية:

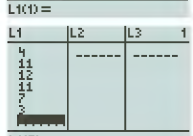
اضغط على $\boxed{2^{nd}}$ ثم $\boxed{+}$ تحصل على الشاشة المقابلة.

اضغط على $\boxed{4}$ لتختار إفراغ اللوائح ثم على $\boxed{\text{ENTER}}$.



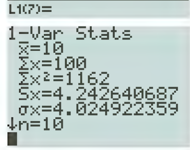
أدخل المعطيات:

اضغط على $\boxed{\text{STAT}}$ ثم $\boxed{\text{ENTER}}$، تحصل على الشاشة المقابلة. أدخل المعطيات في اللائحة L_1 عن طريق إدخالها معطى بعد آخر والضغط على $\boxed{\text{ENTER}}$ كلما أدخلت معطى. بعد الانتهاء من إدخال المعطيات تحصل على الشاشة المقابلة.



اضغط على $\boxed{\text{STAT}}$ واختر CALC ثم اضغط على $\boxed{\text{ENTER}}$ لتختار حساب قياسات متغيِّر إحصائي واحد.

اضغط على $\boxed{2^{nd}}$ ثم $\boxed{1}$ لتختار اللائحة L_1 ثم $\boxed{\text{ENTER}}$ لإطلاق عملية الحساب. ستحصل على الشاشة المقابلة حيث ترى قيم المتوسِّط $\bar{x}$ والانحراف المعياري σx.



حــاولْ استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد الانحراف المعياري لمجموعة المعطيات $\{0,3,1,1,0,5,1,0,3,0\}$.

لإيجاد التباين والانحراف المعياري لمجموعة معطيات مجمَّعة في فئات. قم بالخطوات التالية:

1. حدِّد لكل فئة مركزها x_i، واضرب قيمته في تكرار الفئة f_i. اجمع نواتج الضرب هذه، واقسم المجموع على مجموع التكرارات لتحصل على متوسط المعطيات $\bar{x}$.
2. احسب تربيعات الفروق بين المتوسِّط $\bar{x}$ ومركز كل فئة x_i.
3. اجمع التربيعات التي حصلت عليها.
4. اضرب كل تربيع عائد إلى فئة بتكرار هذه الفئة، ثم اجمع نواتج الضرب، واقسم المجموع على مجموع التكرارات، تحصل على التباين.
5. جد الجذر التربيعي الموجب للتباين، تحصل على الانحراف المعياري.

مثـــــال 3 **إيجاد التباين والانحراف المعياري لمجموعة معطيات مجمَّعة في فئات**

جِد التباين والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات المجمَّعة في فئات كما يُبيّن ذلك الجدول التالي:

الفئة	$[20,22[$	$[22,24[$	$[24,26[$	$[26,28[$	$[28,30[$
التكرار	5	10	20	10	5

أنشئ الجدول التالي ثم أكمله:

الفئة	التكرار f_i	المركز x_i	$f_i \bullet x_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i \bullet (x_i-\bar{x})^2$
$[20,22[$	5	21	105	-4	16	80
$[22,24[$	10	23	230	-2	4	40
$[24,26[$	20	25	500	0	0	0
$[26,28[$	10	27	270	2	4	40
$[28,30[$	5	29	145	4	16	80
المجموع	50	المجموع	1250		المجموع	240

المتوسِّط $\bar{x}=\frac{1250}{50}=25$

التباين: $\sigma^2=\frac{240}{50}=4.8$

الانحراف المعياري: $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{4.8}\approx 2.2$

حــاولْ جد التباين والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات المجمَّعة في فئات، كما يُبيّن ذلك الجدول التالي:

الفئة	$[18,20[$	$[20,22[$	$[22,24[$	$[24,26[$	$[26,28[$
التكرار	8	12	20	12	8

التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

1 لماذا يكون التباين والانحراف المعياري على الدوام عددَين موجبَين؟

2 أي علاقة تربط بين التباين والانحراف المعياري؟ هل يكون الانحراف المعياري على الدوام أصغر من التباين؟

تمارين موجّهة

جد التباين والانحراف المعياري لكل مجموعة معطيات باستعمال الجبر.

3 {10,8,6,4,2}

4 {3,3,4,5,5}

5 استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد الانحراف المعياري لمجموعة المعطيات {4.82, 5.22 , 8.32, 3.22, 1.56} .

6 يُبيّن الجدول التالي توزيع العاملين في إحدى المؤسسات وفقًا لأعمارهم. احسب التباين والانحراف المعياري لهذه المعطيات.

الفئة	[20,22[	[22,24[	[24,26[	[26,28[	[28,30[	[30,32[
التكرار	5	10	20	10	5	2

تمارين وتطبيقات

جد التباين والانحراف المعياري لكل مجموعة معطيات باستعمال الجبر.

7 {4,4,4,4,5}

8 {8,12,30,35,48,50,62}

9 استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد الانحراف المعياري لمجموعة المعطيات {0.33,1.24,2.71,7.42,6.21}

10 يُبيّن الجدول التالي نتائج استفتاء جرى على عيّنة من الموسيقيين حول عدد الساعات التي يُخصّصونها للتمرُّن أسبوعيًّا. احسب التباين والانحراف المعياري لهذه المعطيات.

الفئة	[1,6[	[6,11[	[11,16[	[16,21[	[21,26[	[26,31[	[31,36[	[36,41[
التكرار	13	9	9	14	16	8	8	3

11 **كرة السلة** لعب آلان 13 مباراة في كرة السلّة، وحقّق فيها النقاط التالية على التوالي: 24، 16، 9، 17، 17، 23، 20، 26، 17، 14، 58، 27، 28. جِد المتوسّط والتباين والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات تلك.

12 مجموعة معطيات متوسّطها 4، ووسيطها 3، وانحرافها المعياري 1.6

أ) ضربت كل مُعطى في 5. ما متوسّط مجموعة المعطيات الجديدة؟ ما وسيطها؟ ما انحرافها المعياري؟

ب) أضفت 5 إلى كل مُعطى أصلي. ما متوسّط مجموعة المعطيات الجديدة؟ ما وسيطها؟ ما انحرافها المعياري؟

13 **قياس** طلب معلم الصف الرابع إلى تلاميذه أن يقيسوا بالسنتيمتر طول الطاولة التي يجلسون إليها. دوّن المعلّم هذه القياسات على اللوح الأسود. وكانت كما يلي: 49، 50، 49، 48، 48، 19، 50، 49، 48، 50، 49، 50. جِد متوسّط هذه المعطيات ووسيطها وانحرافها المعياري.

14 إذا تضمَّنت مجموعة معطيات عنصرًا كانت المسافة بينه وبين متوسِّط المجموعة أكبر من ثلاثة أضعاف الانحراف المعياري يُسمّي الإحصائيون هذا العنصر **قيمة متطرِّفة** . استعمل معطيات التمرين السابق، واذكر إن كان بينها قيم متطرِّفة. علِّل جوابك.

نظرة إلى الوراء

15 رمى نوزاد مكعَّب أعداد.

أ ما احتمال أن يُظهر المكعَّب العدد 3؟

ب ما احتمال أن يُظهر المكعَّب العدد8؟

ج ما احتمال أن يُظهر المكعَّب عددًا غير موجب؟

د ما احتمال أن يُظهر المكعَّب عددًا زوجيًّا؟

نظرة إلى الأمام

16 يُبيّن الجدول المقابل أعداد طلاّب الصفوف العاشر والحادي عشر والثاني عشر في إحدى الثانويات.

الصف	ذكور	إناث	المجموع
العاشر	53	51	
الحادي عشر	47	50	
الثاني عشر	35	44	
المجموع			

أ انسخ الجدول ثم أكمله.

ب ما احتمال أن يكون طالب تم اختياره عشوائيًّا من طلاّب الصف الحادي عشر؟

ج ما احتمال أن يكون طالب تم اختياره عشوائيًّا أنثى؟

د ما احتمال أن يكون طالب تم اختياره عشوائيًّا ذكرًا من الصف الثاني عشر؟

هـ ما احتمال أن يكون طالب تم اختياره عشوائيًّا أنثى من الصف العاشر؟

و ما احتمال يكون طالب تم اختياره عشوائيًّا ذكرًا أو من الصف العاشر؟

الدرس 3

قوانين الاحتمال Laws of probability

لماذا؟

يستعمل الخبراء في أمور الانتخابات الاحتمال ومعطيات التطور الديموغرافي ونتائج الدورات السابقة، لصياغة توقعات حول نتائج الدورة المقبلة.

الأهداف

- يذكر قوانين الاحتمال ويستعملها.

المفردات Vocabulary

الأحداث المتنافية Mutually exclusive events

الأحداث المستقلّة Independent events

متمِّم الحدث Complement of an event

المُخرَج Outcome

تعلّمت في الصفوف السابقة المفاهيم الأوليّة في الاحتمال، كما تعلّمت كيف تحسب احتمال حدث كالحصول على العدد 5، عند رمي مكعَّب الأعداد. سوف تتعلم في هذا الدرس أن هناك علاقات يُمكن لها أن تربط بين عدة أحداث، وأن بالإمكان تركيب أحداث جديدة، انطلاقًا من أحداث أخرى باستعمال الرابط «و» أو الرابط «أو»، مثل الحدث:«الحصول على عدد زوجي، أو الحصول على عدد أصغر من 3» الذي يتركَّب من حدث:«الحصول على عدد زوجي» وحدث:«الحصول على عدد أصغر من 3» باستعمال الرابط «أو». يُلخِّص الجدول أدناه المفاهيم الأساسية التي سبق لك تعلُّمها.

المفهوم	التوضيح	مثال
التجربة العشوائية Experience	فعل يؤدي إلى نتائج نستطيع ذكرها، ولا نستطيع أن نحدِّد أيًّا منها سيتحقق بالفعل. تُسمّى كل نتيجة ممكنة **مُخرَجًا**.	رمي مكعب أعداد. نعلم أن النتائج المكنة هي 1، 2، 3، 4، 5، 6 ، ولا نعلم أيًّا منها سيظهر.
فضاء الاحتمالات Sample space	مجموعة كل النتائج المكنة ، أي مجموعة كل المُخرَجات.	فضاء الاحتمالات عند رمي مكعَّب الأعداد، هو المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
الحدث Event	جزء من فضاء الاحتمالات. يكون الحدث **بسيطًا**، إذا اقتصر على مُخرَج وحيد.	الحصول على عدد فردي عند رمي مكعَّب الأعداد هو الحدث $\{1, 3, 5\}$. الحدث $\{5\}$ حدث بسيط.
الاحتمال Probability	احتمال حدث ما، هو عدد p يُحقق $0 \leq P \leq 1$. ويقيس حظ الحدث بالتحقُّق. احتمال الحدث **المستحيل** هو $P=0$، واحتمال الحدث **المؤكَّد** هو $P=1$. مجموع احتمالات الأحداث البسيطة لتجربة عشوائية هو 1.	إذا كان A هو حدث «الحصول على عدد أقل من 5 » عند رمي مكعَّب الأعداد، فإن احتماله هو $p(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
تساوي الاحتمالات Equally likely	تكون التجربة العشوائية متساوية الاحتمالات، إذا تساوت احتمالات جميع الأحداث البسيطة ، أي تساوت حظوظ جميع المُخرَجات بالتحقُّق . في هذه الحالة، يساوي احتمال حدث ما نسبة عدد النتائج التي تحقق الحدث إلى عدد النتائج المكنة كلها.	رمي مكعَّب الأعداد تجربة عشوائية متساوية الاحتمالات. إذا كان A هو حدث «الحصول على عدد أقل من 5 »، فإن عدد النتائج التي تحقِّق الحدث هو 4، في حين أن عدد النتائج المكنة هو 6. ينتج من ذلك أن $p(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

إذا كان A وَ B حدثَيْن في تجربة عشوائية، تستطيع تعريف أحداث أخرى بتركيب هذين العددين. فالحدث $A\cup B$ (اقرأ A أو B) هو الحدث الذي يتكوّن من جمع عناصر الحدث A وعناصر الحدث B. فإذا كان $A=\{2, 4, 6\}$ حدث «الحصول على عدد زوجي» وَ $B=\{3\}$ حدث «الحصول على العدد 3»، فإن الحدث $A\cup B$ هو $A\cup B=\{2, 3, 4, 6\}$. والحدث $A\cap B$ (اقرأ A وَ B) هو الحدث الذي يتكوّن من جميع العناصر المشتركة بين الحدث A والحدث B. فإذا كان $A=\{2, 4, 6\}$ حدث «الحصول على عدد زوجي» وَ $B=\{1, 2\}$ حدث «الحصول على عدد أقل من 3»، فإن الحدث $A\cap B$ هو $A\cap B=\{2\}$.

مثـــــال 1 **إيجاد أحداث مركَّبة**

تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّب أعداد. جِد الحدث $A\cup B$ والحدث $A\cap B$، حيث A هو حدث «الحصول على عدد فردي»، وَ B هو حدث «الحصول على عدد أكبر من 1».

الحدث A هو الحدث $A=\{1, 3, 5\}$ والحدث B هو الحدث $B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$. الحدث $A\cup B$ هو $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، أي الحدث المؤكَّد؛ والحدث $A\cap B$ هو الحدث $A\cap B=\{3, 5\}$.

حـــاولْ تقضي التجربة العشوائية بسحب كرة واحدة من كيس فيه 10 كرات مرقَّمة من 1 إلى 10. جِد الحدث $A\cup B$ والحدث $A\cap B$ ، حيث A هو حدث «الحصول على عدد فردي»، وَ B هو حدث «الحصول على عدد أكبر من 9».

احتمال $A\cup B$

إذا كان الحدثان A وَ B متنافيَيْن، فإن

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

إذا كان الحدثان A وَ B غير متنافيين، فإن

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

مثـــــال 2 **إيجاد احتمالات أحداث مركَّبة**

تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّب أعداد.

أ جِد احتمال الحدث $A\cup B$ واحتمال الحدث $A\cap B$ ، حيث A هو حدث «الحصول على عدد فردي»، وَ B هو حدث «الحصول على أكبر من 1».

الحدث A هو الحدث $A=\{1, 3, 5\}$ ، والحدث B هو الحدث $B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$. ينتج من ذلك

$p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ وَ $p(B)=\frac{5}{6}$

من ناحية أخرى، فإن الحدث $A\cap B$ هو الحدث $A\cap B=\{3, 5\}$. ينتج من ذلك $p(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

وبالتالي: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{6}+\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{6}{6}=1$

للتحقُّق من النتيجة، نلاحظ أن الحدث $A\cup B$ هو $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، أي الحدث المؤكَّد وبالتالي $P(A\cup B)=1$.

ب جِد احتمال الحدث $A \cup B$ واحتمال الحدث $A \cap B$، حيث A هو حدث «الحصول على عدد زوجي»، وَ B هو حدث «الحصول على عدد أصغر من 2».

الحدث A هو حدث $A=\{2,4,6\}$، والحدث B هو الحدث $B=\{1\}$ ينتج من ذلك:

$p(B)=\frac{1}{6}$ وَ $p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

من ناحية أخرى، فإن الحدث $A \cap B$ هو الحدث $A \cap B=\{\ \}=\varnothing$، أي أن الحدثين متنافيان.

ينتج من ذلك: $p(A \cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

للتحقُّق من النتيجة، نلاحظ أن الحدث $A \cup B$، هو $A \cup B=\{1, 2, 4, 6\}$ وبالتالي

$p(A \cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

حـــاولْ تقضي التجربة العشوائية بسحب كرة واحدة من كيس فيه 7 كرات مرقَّمة من 1 إلى 7.

أ جِد احتمال الحدث $A \cup B$، واحتمال الحدث $A \cap B$، حيث A هو حدث «الحصول على عدد زوجي»، وَ B هو حدث «الحصول على عدد أكبر من 3».

ب جِد احتمال الحدث $A \cup B$، واحتمال الحدث $A \cap B$، حيث A هو حدث «الحصول على عدد زوجي»، وَ B هو حدث «الحصول على عدد أكبر من 6».

إذا كان A وَ B حدثَيْن متنافيين، فإنهما لا يتحقَّقان معًا، لأن تحقُّق أحدهما يمنع تحقُّق الثاني في الوقت نفسه. هل يحتِّم عدم تحقُّق أحدهما أن يتحقَّق الآخر؟ قد يكون الأمر كذلك وقد لا يكون. فإذا كان الحدث A «الحصول على عدد زوجي» عند رمي مكعَّب أعداد، وكان الحدث B «الحصول على العدد 3»، فإن عدم تحقُّق أحدهما لا يحتِّم تحقُّق الآخر، لأن الحصول على 5 لا يحقِّق أيًّا منهما. على العكس من ذلك، إذا كان الحدث A «الحصول على الكتابة» عند رمي قطعة نقود معدنية، وكان الحدث B «الحصول على الصورة»، فإن عدم تحقُّق أحدهما يحتِّم تحقُّق الآخر، أي أن الحدثين يُحقِّقان: $A \cap B$ هو الحدث المستحيل وَ $A \cup B$ هو الحدث المؤكَّد. في هذه الحالة تقول عن الحدث B أنه متمِّم الحدث A. استعمل الرمز $\overline{A}$ للدلالة على متمِّم الحدث A. لاحظ التالي:
إذا كان B متمِّم A فإن A هو متمِّم B.

مـثـــــال 3 **إيجاد الحدث المتمِّم**

جِد الحدث المتمِّم في كل حالة.

أ تقضي التجربة العشوائية برمي قطعة معدنية مرَّتَيْن متتاليتَيْن. الحدث A هو «الحصول على الصورة مرَّة على الأكثر».

ب تقضي التجربة العشوائية باختيار مندوب عن الصف الحادي عشر بطريقة القرعة. الحدث A هو «اختيار أنثى».

أ فضاء الاحتمالات هو $\{(T, T), (T, I), (I, T), (I, I)\}$، حيث يُمثِّل I الحصول على الصورة، وَ T الحصول على الكتابة. الحدث A هو $\{(T, T), (T, I), (I, T)\}$.
ينتج من ذلك $\overline{A}=\{(I, I)\}$، أي الحصول على الصورة مرَّتين.

ب الحدث المتمم هو حدث «اختيار ذكر».

حـــاولْ جِد الحدث المتمِّم في كل حالة.

أ تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّب الأعداد، الحدث A هو «الحصول على عدد فردي».

ب تقضي التجربة العشوائية برمي قطعة نقود معدنية 3 مرات متتالية. الحدث A هو «الحصول على الصورة مرة على الأقل».

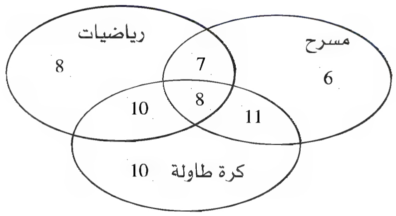
احتمال الحدث المتمِّم

يتم حساب احتمال الحدث المتمِّم للحدث A باستعمال القاعدة.

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

مثـــــال 4 **إيجاد الحدث المتمِّم**

في إعدادية آزادي ثلاثة أندية: نادي المسرح ويضمّ 32 عضوًا، ونادي الرياضيات ويضمّ 33 عضوًا، ونادي كرة الطاولة ويضمّ 39 عضوًا. بعض الطلاّب أعضاء في أكثر من نادٍ، كما يُبيّن ذلك المخطَّط المقابل.



اختار المدير أحد أعضاء هذه النوادي بطريقة عشوائية، لتمثيل المدرسة في اجتماع يُعقد في مديرية التعليم. ما احتمال أن ينتمي العضو المختار إلى ناديَيْن على الأقل؟

إذا كان الحدث A «عضو في ناديين على الأقل»، فإن الحدث المتمِّم $\overline{A}$ هو «عضو في نادٍ واحد».
يتألَّف فضاء الاحتمالات من 60 عنصرًا
(عدد المنتسبين إلى النوادي الثلاثة $60=6+7+8+8+11+10+10$). عدد المُخرَجات التي تحقِّق الحدث المتمِّم هو $24=6+8+10$ ينتج من ذلك $P(\overline{A})=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$ وَ

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}=0.60=60\%$$

حـــاولْ ما احتمال أن يكون المندوب الذي تم اختياره عضوًا في ناديين فقط؟

إذا كان A وَ B حدثَيْن في تجربة عشوائية واحدة، قد يكون لتحقُّق أحدهما تأثير على تحقُّق الآخر، وقد لا يكون له تأثير. فإذا كان لديك كيس فيه 5 كرات حمراء وَ 3 كرات زرقاء وكانت التجربة أن تسحب كرتين على التوالي، فإن احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء يختلف بين أن تعيد الكرة الأولى إلى الكيس قبل سحب الثانية، وألاّ تعيدها إليه.
ليكن الحدث A «الكرة الأولى خضراء» والحدث B «الكرة الثانية حمراء». إذا أعدت الكرة الأولى إلى الكيس قبل سحب الكرة الثانية، فإن الحدث A لا يؤثِّر في احتمال الحدث B الذي يساوي $\frac{5}{8}$.
أما إذا لم تعد الكرة الأولى إلى الكيس قبل سحب الكرة الثانية، فإن احتمال B هو $\frac{5}{7}$.
تقول عن حدثين A وَ B أنهما **مستقلّان** إذا لم يكن لتحقُّق أحدهما أو عدم تحقُّقه تأثير على احتمال تحقُّق الآخر.

احتمالات الأحداث المستقلّة

إذا كان A وَ B حدثَيْن مستقلَّيْن فإن

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

مثـــــال 5 **إيجاد احتمالات الأحداث المستقلّة**

تقضي التجربة العشوائية بسحب كرتَيْن على التوالي من كيس فيه 9 كرات حمراء وَ 3 كرات خضراء. جِد احتمال أن تكون الكرتان حمراوين، مفترضًا إعادة الكرة الأولى إلى الكيس قبل سحب الثانية.

تمت إعادة الكرة الأولى إلى الكيس قبل سحب الثانية: الحدثان، في هذه الحالة، مستقلان

وَ $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$

لأن $P(A)=P(B)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

حـــاولْ مع آكار كيس فيه 6 كرات حمراء وَ 4 كرات زرقاء، ومع أخيها كيس فيه كرتان صفراوان وكرة حمراء و 5 كرات سوداء. سحب كل منهما كرة من كيسه. ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين؟

مثـــــال 6 **إيجاد احتمالات الأحداث المستقلّة**

تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّب الأعداد 3 مرات متتالية. ما احتمال الحصول على عدد زوجي في كل مرة؟

الأحداث A «الحصول على عدد زوجي في المرة الأولى» وَ B «الحصول على عدد زوجي في المرة الثانية» وَ C «الحصول على عدد زوجي في المرة الثالثة» أحداث مستقلّة، واحتمال كل منها يساوي $\frac{1}{2}$.

ينتج من ذلك: $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

حـــاولْ تقضي التجربة العشوائية برمي قطعة نقود معدنية 4 مرات متتالية. ما احتمال الحصول على الصورة في كل مرة؟

التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

1. أي من قاعدتَي حساب احتمال الحدث $A\cup B$ تصحّ في جميع الأحوال؟ وضِّح جوابك.
2. كيف تتحقّق من أن حدثَيْن A وَ B مستقلاّن إذا عرفت احتمال كل منهما واحتمال $A\cap B$؟

تمارين موجّهة

3. تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّب أعداد. جِد $A\cap B$ وَ $A\cup B$، حيث الحدث A «الحصول على عدد أقل من 5» وَ الحدث B «الحصول على عدد لا يقل عن 3».

4 في استطلاع للرأي حول تحديث الأساليب التربوية، تم استفتاء آراء 100 من العاملين في الحقل التربوي. يُبيّن الجدول المقابل نتائج هذا الاستفتاء. انسخ الجدول ثم أكمله. لو تم اختيار أحد المستطلعين بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون من الذين كانوا ضد التحديث أو كانوا بلا رأي؟

	ذكور	إناث	المجموع
مع	18	9	
ضد	12	25	
بلا رأي	20	16	
المجموع			

5 في التجربة العشوائية للتمرين السابق، جِد الحدث المتمِّم للحدث «تم اختيار المُستطلع من الذين أبدوا رأيًا».

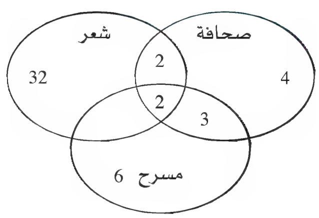
6 استعمل الحدث المتمِّم لإيجاد احتمال أن يكون المستطلع قد أبدى رأيًا.

7 تقضي التجربة العشوائية بإدارة القرص المُؤشِّر مرَّتين متتاليتين. ما احتمال الحصول على العدد 4 في المرَّتين.

8 تقضي التجربة العشوائية بإدارة القرص المُؤشِّر 3 مرات متتالية. ما احتمال الحصول على اللون الأحمر ثم الأخضر ثم الأحمر من جديد؟

تمارين وتطبيقات

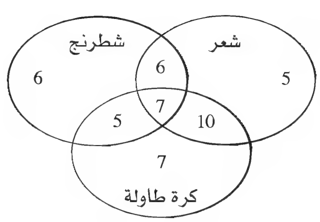
9 في إعدادية أحمدي خاتي ثلاثة أندية للنشاطات غير الصفّية. نادٍ للشعر ويضم 36 عضوًا، ونادٍ للمسرح ويضم 11 عضوًا، ونادٍ للصحافة ويضم 11 عضوًا أيضًا. ينتمي بعض التلاميذ إلى أكثر من نادٍ واحد كما يُبيّن ذلك المخطَّط المقابل. تم اختيار أحد أعضاء النوادي الثلاثة بصورة عشوائية. ما احتمال أن ينتمي هذا العضو إلى ناديَيْن على الأقل؟



10 هفال طالب في الشعبة الأولى من الصف الحادي عشر التي تعدّ 18 تلميذًا، وأخته في الشعبة الثانية التي تعدّ 20 طالبة. جرى اختيار مندوب عن كل شعبة بطريقة القرعة. ما احتمال أن يكون هفال وأخته مندوبَي الشعبتين؟

11 ما احتمال أن تحصل على الكتابة ثم الصورة ثم الصورة عند رمي قطعة نقود معدنية 3 مرات متتالية؟

12 في إعدادية حلبجة ثلاثة أندية: نادي الشطرنج ويضم 24 عضوًا ونادي كرة الطاولة ويضم 29 عضوًا، ونادي الشعر ويضم 28 عضوًا. ينتمي بعض التلاميذ إلى أكثر من نادٍ واحد كما يُبيّن ذلك المخطَّط المقابل. ما احتمال أن يكون عضو تم اختياره عشوائيًا منتسبًا إلى ناديين على الأكثر؟



13 الأحداث A وَ B وَ C مستقلّة واحتمالاتها هي: $P(A)=0.5$ ، $P(B)=0.25$ ، $P(C)=0.75$. جِد الاحتمالات التالية: **أ** $P(A\cap B)$ ، **ب** $P(A\cap C)$ ، **ج** $P(A\cup B)$.

فِي التمارين من 16 إلى 18، حدِّد إن كان الحدثان A وَ B مستقلَّيْن أم لا، واحسب احتمال $A\cap B$.

14 التجربة العشوائية: رمي مكعّب أعداد. الحدث A: «الحصول على عدد زوجي». الحدث B: «الحصول على 2 أو 4».

15 التجربة العشوائية: رمي مكعّب أعداد. الحدث A: «الحصول على العدد 6». الحدث B: «الحصول على عدد أقل من 5».

16 التجربة العشوائية: رمي مكعّب أعداد. الحدث A: «الحصول على العدد 4». الحدث B: «الحصول على عدد أكبر من 3».

17 **طيران** تُظهر إحصاءات إحدى شركات الطيران أن رحلتها من تاران إلى هولير تصل فِي موعدها فِي 92% من المرات، وأن رحلتها من هولير إلى عمّان تُقلع فِي موعدها فِي 97% من المرّات. ينوي كرمانج السفر من تاران إلى عمّان مرورًا بهولير. ما احتمال أن تصل الطائرة التي تنقله إلى هولير فِي موعدها، وأن تُقلع إلى عمّان فِي موعدها؟

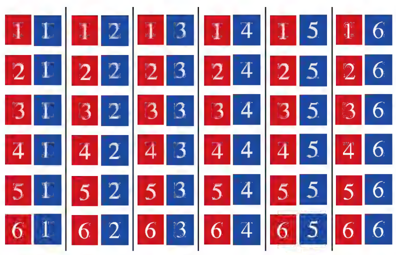
18 احتمال أن يحضر كامران الاحتفال هو 80% ، واحتمال أن يحضره كاروان 95%. ما احتمال حضورهما الاحتفال معًا، علمًا بأن حضور أحدهما لا يؤثِّر فِي حضور الآخر؟

19 يحتوي كيس على 15 كرة مرقّمة من 1 إلى 15. سحبت رانية كرة من الكيس ثم إعادتها إليه قبل أن تسحب كرة للمرة الثانية.

أ ما احتمال أن تحمل الكرتان العدد 8؟

ب ما احتمال أن تسحب رانية الكرة التي تحمل العدد 8 مرة واحدة فقط؟

20 تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّبي أعداد أحدهما أحمر والثاني أزرق. الحدث A هو التالي «يُظهر المكعب الأحمر العدد 1» وَ الحدث B هو التالي: «مجموع العددين الظاهرين أقلّ من 4».



أ جِد $P(A)$ وَ $P(B)$.

ب اكتب المُخرَجات التي تُحقِّق الحدث $A\cap B$ ، واستنتج احتمال هذا الحدث.

ج استعمل جوابي السؤالَيْن السابقَيْن لتقرِّر إن كان الحدثان مستقلَّيْن أم لا.

21 جاء 5 تلاميذ إلى مسرح المدرسة، واختار كل منهم صفًّا من مقاعد المسرح العشرة ليجلس فيه. ما احتمال أن يختار تلميذان على الأقل الصف نفسه؟

22 **تفكير ناقد** إذا كان الحدثان A وَ B مستقلَّين، هل يكون الحدثان المتمِّمان $\overline{A}$ وَ $\overline{B}$ مستقلين؟ علِّل جوابك.

23 **اكتب** اذكر طريقتين لإيجاد احتمال الحصول على الكتابة مرَّة على الأقل عند رمي قطعة نقود معدنية مرَّتين متتاليتَيْن.

24 تم صنع قطعة نقود معدنية بحيث يكون احتمال ظهور الصورة عند رمي القطعة ضعف احتمال ظهور الكتابة. جِد احتمال ظهور كل من الصورة والكتابة.

نظرة إلى الوراء

25 دوَّنت شيرين على مدى 10 أسابيع متوسِّط عدد الكيلومترات التي قطعتها سيارتها بالغالون الواحد، وحصلت على18 ،17 ،19 ،18 ،18 ،25 ،29 ،30 ،26 ،19 .

أ جِد متوسِّط هذه المعطيات ووسيطها ومنوالها.

ب جِد القيمة الكبرى والقيمة الصغرى والمدى.

ج جِد التباين والانحراف المعياري.

د ما المعطيات التي تبعد عن المتوسط أكثر من انحراف معياري واحد؟

نظرة إلى الأمام

26 تضم عيِّنة من السائقين 3510 أشخاص بينهم 1950 رجلاً وَ 103 مصابون بعمى الألوان. 6 أشخاص فقط من المصابين بعمى الألوان هم من النساء. ما احتمال أن يكون شخص تم اختياره عشوائيًّا من الرجال أو من المصابين بعمى الألوان؟

الدرس 4

تقنيات العد Counting techniques

لماذا؟

تستعمل شيرين تقنيات العد لإيجاد عدد الطرق التي يُمكن أن تعرض بها اللوحات التي رسمتها.

الأهداف

- يستعمل تقنيات العد لحساب الاحتمالات.

المفردات Vocabulary

التباديل Permutations

التراتيب Arrangements

التوافيق Combinations

القانون الأساسي للعد Fundamental counting principle

مخطَّط الشجرة Tree diagram

تعلَّمت أن حساب احتمال تحقُّق حدث في تجربة عشوائية متساوية الاحتمالات يعود إلى قسمة عدد المُخرَجات التي تحقِّق الحدث على عدد المُخرجات كلها. من هنا نشأت الحاجة إلى تقنيات عد تساعد على إيجاد مثل هذه الأعداد.

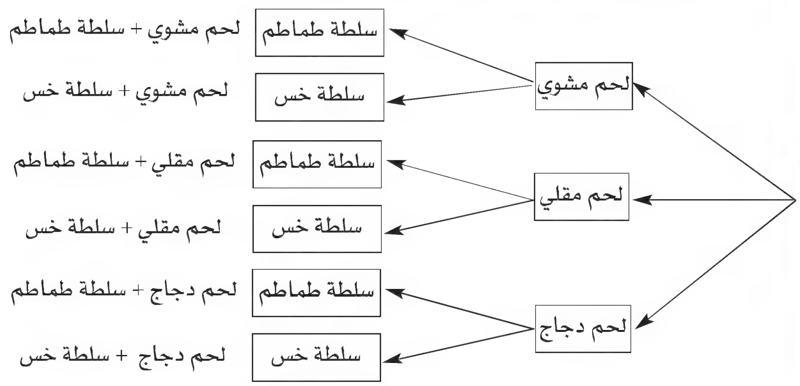
يُلخِّص الجدول أدناه بعض تقنيات العد التي تعلَّمتها من قبل.

التقنية	الشرح	مثال
القانون الأساسي للعد **Fundamental counting principle**	ينص هذا القانون على التالي: إذا كان هناك m طريقة لخيار أول وَ n طريقة لخيار ثان، فإن هناك $m\times n$ طريقة للخيارين معًا.	تتألف وجبة الغداء من صحن مقبّلات وصحن رئيسي. إذا كان عدد صحون المقبّلات 5 وعدد الصحون الرئيسية 3، فيمكنك اختيار غدائك بـ $3\times5=15$ طريقة.
مضروب n ***n* factorial**	إذا كان n عددًا صحيحًا غير سالب ، فإن مضروب n هو $n!=\begin{cases}1 & n=0\\ 1\times2\times..\times n & n>0\end{cases}$	$3!=1\times2\times3=6$ $0!=1$
التباديل **Permutations**	تبديل n شيئًا هو وضعها في ترتيب معيّن. عدد تباديل n شيئًا هو مضروب n، أي $n!$.	تباديل الأحرف A, B, C هي ABC, BCA, CAB ACB, CBA, BAC وعددها $3!=6$
التراتيب **Arrangements**	ترتيب r شيئًا من أصل n هو اختيار r شيئًا من الأشياء n بترتيب معيّن. عدد تراتيب r شيئًا من أصل n هو $_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$	AB و BA ترتيبان مختلفان لحرفَيْن من أصل الأحرف الثلاثة A, B, C. عدد تراتيب حرفَيْن من أصل 3 هو $_3P_2=\frac{3!}{(3-2)!}=6$
التوافيق **Combinations**	توفيق r شيئًا من أصل n هو اختيار r شيئًا من الأشياء n من دون التوقُّف عند الترتيب. عدد توافيق r شيئًا من أصل n هو $_nC_r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$	$\{A,B\}$ هو توفيق حرفين من أصل الأحرف الثلاثة A, B, C . عدد توافيق حرفين من أصل 3 هو $_3C_2=\frac{3!}{2!(3-2)!}=3$

مثـــــــال

7 استعمال مخطَّط الشجرة للعد

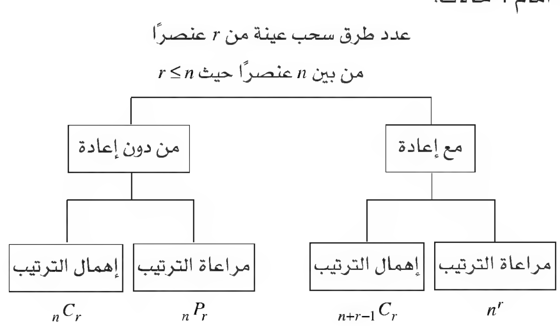
دخل أحد الأشخاص إلى مطعم لتناول وجبة الغداء. وجد أن عليه أن يختار نوعًا بين 3 أنواع من اللحوم: لحم مشوي ولحم مقلي ولحم دجاج، ونوعًا بين نوعين من السلطة: سلطة خس وسلطة طماطم. أنشئ مخطَّط شجرة يُبيّن جميع الطرق الممكنة لاختيار طبق لحم وطبق سلطة. احسب احتمال أن يختار الشخص طبق لحم مشوي وطبق سلطة.



يستطيع هذا الشخص اختيار طبق لحم وطبق سلطة بـ 6 طرق ممكنة. وهو يستطيع أن يختار غداء مكوَّنًا من طبق لحم مشوي وطبق سلطة بطريقتَيْن. ينتج من ذلك أن احتمال اختياره طبق لحم مشوي وطبق سلطة هو $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

حــــاولْ ما احتمال أن يختار طبق لحم وسلطة طماطم؟

يُستعمل مخطَّط الشجرة عندما يكون عدد المُخرَجات قليلاً. غير الأمر ليس يسيرًا في غالب الأحيان. فإذا حاولت أن تُنشئَ مخطط شجرة لإيجاد كم عددًا من 5 أرقام مختلفة يُمكنك أن تُركّب باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6 فإن عدد أوراق الشجرة سيكون كبيرًا. من هنا نشأت الحاجة إلى تقنيات أخرى للعد. من هذه التقنيات مبدأ العد الأساسي. يقوم هذا المبدأ على أن اختيار r عنصرًا من n ، عنصرًا بعد آخر، يجعل عدد الخيارات الممكنة مساويًا لناتج ضرب عدد الخيارات الممكنة عند اختيار كل عنصر. تختلف النتيجة إذا كان العنصر المختار يُعاد إلى المجموعة قبل اختيار العنصر اللاحق أم لا، وإذا كان الترتيب الذي يتم به الاختيار مهمًّا أم لا. وهذا يضعنا أمام 4 حالات:



مثـــــــال 2 **استعمال القانون الأساسي للعد لإيجاد عدد عناصر عيّنة**

كم عددًا من 5 أرقام مختلفة يُمكنك أن تُركِّب باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6؟

لتركيب مثل هذا العدد، ابدأ باختيار رقم الآحاد. يُمكنك اختياره من بين 6 أرقام. عدد الخيارات هو 6. اختر بعد ذلك رقم العشرات. يُمكنك اختياره من بين الأرقام الخمسة المتبقية. عدد الخيارات هو 5. وهكذا فإن عدد خيارات رقم المئات هو 4، وعدد خيارات رقم الآلاف هو 3، وعدد خيارات رقم عشرات الآلاف هو 2. استعمل القانون الأساسي للعد كي تجد كم عددًا يُمكنك أن تُكوّن. يُمكنك أن تُكوّن

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$$

720 عددًا

حـــاولْ كم عددًا من 4 أعداد مختلفة تستطيع أن تركِّب باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7؟

مثـــــــال 3 **إيجاد عدد الطرق لسحب عيّنة**

يحتوي صندوق على 7 كرات مرقَّمة من 1 إلى 7. جِد عدد الطرق لسحب 3 كرات في الحالات التالية:

أ مع إعادة، ومع مراعاة الترتيب.

ب مع إعادة، ومع إهمال الترتيب.

ج من دون إعادة، ومع مراعاة الترتيب.

د من دون إعادة، ومع إهمال الترتيب.

أ)	مع إعادة ومع مراعاة الترتيب	$n^r = 7^3 = 343$
ب)	مع إعادة ومع إهمال الترتيب	${}_{n+r-1}C_r = {}_{7+3-1}C_3 = {}_9C_3 = 84$
ج)	من دون إعادة ومع مراعاة الترتيب	${}_7P_3 = 210$
د)	من دون إعادة ومع إهمال الترتيب	${}_7C_3 = 35$

حـــاولْ يحتوي صندوق على 10 كرات مرقَّمة من 1 إلى 10. جِد عدد الطرق لسحب 4 كرات في الحالات التالية:

أ مع إعادة ومع مراعاة الترتيب

ب مع إعادة ومع إهمال الترتيب

ج من دون إعادة ومع مراعاة الترتيب

د من دون إعادة ومع إهمال الترتيب

مثـــــــال 4 **حساب احتمال باستعمال تقنيات العد**

يحتوي صندوق على 20 كرة مرقَّمة من 1 إلى 20. جرى سحب كرتين على التوالي ولم تتم إعادة الكرة الأولى إلى الصندوق قبل سحب الكرة الثانية. ما احتمال أن تحمل كل كرة عددًا فرديًّا؟

كل مُخرَج من مُخرَجات هذه التجربة العشوائية هو زوج مرتَّب (n_1, n_2) حيث يرمز n_1 إلى العدد الذي تحمله الكرة الأولى ويرمز n_2 إلى العدد الذي تحمله الكرة الثانية. عدد هذه المُخرَجات بالاستناد إلى القانون الأساسي للعد هو ناتج ضرب عدد الكرات في الصندوق عند سحب الكرة الأولى(20) في عدد الكرات عند سحب الكرة الثانية (19) أي $20 \times 19 = 380$. عدد المُخرَجات التي تحقِّق الحدث هو ناتج ضرب عدد الكرات التي تحمل عددًا فرديًّا عند سحب الكرة الأولى (10) في عدد الكرات التي تحمل عددًا فرديًّا عند سحب الكرة الثانية (9) أي 90. ينتج من ذلك أن احتمال أن تحمل كل كرة عددًا فرديًّا هو $\frac{90}{380} = \frac{9}{38}$.

نقطة مراقبة √ **4.** ما احتمال أن تحمل كل كرة عددًا زوجيًّا؟

مثال 5 **حساب احتمال باستعمال تقنيات العد**

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء وَ 4 كرات بيضاء. جرى سحب كرتين في آن. ما احتمال أن تكون كل كرة حمراء اللون.

عدد مُخرَجات هذه التجربة هو عدد توافيق كرتَيْن من أصل 10 كرات (4+6) . إنه:

$${}_{10}C_2=\frac{10!}{2!(10-2)!}=45$$

عدد المُخرَجات التي تحقّق الحدث هو عدد توافيق كرتَيْن من أصل 6 (عدد الكرات الحمراء). إنه:

$${}_{6}C_2=\frac{6!}{2!(6-2)!}=15$$

ينتج مما سبق أن احتمال أن تكون كل كرة حمراء $\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

حـــاولْ ما احتمال أن تكون كل كرة بيضاء؟

مثال 6 **حساب احتمال باستعمال تقنيات العد**

تُخصّص إدارة الجامعة رقم ملف مكوَّن من 4 أرقام لكل طالب في السنة الأولى. ما احتمال أن يكون رقم باسل مكوَّنًا من 4 أرقام متتالية بدءًا من اليسار.

لتحديد عدد مُخرَجات هذه التجربة علينا أن نحدِّد إن كان كل مُخرَج ترتيبًا لـ 4 أرقام من أصل 10 أو توفيقًا لـ 4 أرقام من أصل 10. بما أن الترتيب الذي تندرج به أرقام الملفّات من اليسار إلى اليمين مهم، فإن المُخرج ترتيب وليس توفيقًا. عدد هذه المخرَجات هو

$${}_{10}P_4=\frac{10!}{4!}=5040$$

المُخرَجات التي تحقّق الحدث هي 0123، 1234، 2345، 3456، 4567، 5678، 6789. عددها 7.

ينتج مما سبق أن احتمال أن يكون رقم باسل مكوّنًا من 4 أرقام متتالية بدءًا من اليسار هو

$$\frac{7}{5040}=\frac{1}{720}$$

حـــاولْ ما احتمال أن يكون رقم ملف باسل مكوّنًا من 4 أرقام متتالية، سواء قرأتها من اليمين إلى اليسار أو بالعكس؟

مثال 7 **حساب احتمال باستعمال تقنيات العد**

يحتوي صندوق على 7 كرات حمراء وَ 3 كرات سوداء. جرى سحب 3 كرات في آن. ما احتمال أن تكون إحدى الكرات على الأقل حمراء؟

عدد مُخرَجات هذه التجربة هو عدد توافيق 3 كرات من أصل 10 كرات (7+3) لأن الكرات سُحبت معًا ولا مجال، بالتالي، للحديث عن ترتيب. إنه

$${}_{10}C_3=\frac{10!}{3!(10-3)!}=120$$

المُخرَجات التي تحقّق الحدث هي تلك التي تتألّف من كرة حمراء وكرتَيْن سوداوين، وتلك التي تتألف من كرتين حمراوين وكرة سوداء، وتلك التي تتألف من 3 كرات حمراء.

عدد المُخرَجات التي تتألَّف من كرة حمراء وكرتين سوداوين هو $_7C_1\times{}_3C_2=7\times3=21$.

عدد المُخرَجات التي تتألَّف من كرتين حمراوين وكرة سوداء هو $_7C_2\times{}_3C_1=21\times3=63$.

عدد المُخرَجات التي تتألَّف من 3 كرات حمراء هو $_7C_3=35$.

عدد المُخرَجات التي تحقّق الحدث هو $21+63+35=119$

ينتج من ذلك أن احتمال أن تكون إحدى الكرات الثلاث على الأقل حمراء هو $\frac{119}{120}$.
كان من الممكن حل هذه المسألة باستعمال الحدث المتمِّم. فالحدث المتمِّم للحدث A «إحدى الكرات الثلاث حمراء» هو الحدث $\overline{A}$ «الكرات الثلاث السوداء». عدد المُخرَجات التي تحقِّق الحدث المتمِّم هو عدد توافيق 3 كرات من أصل 3. إنه 1. ينتج من ذلك $P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{120}$

$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{1}{120}=\frac{119}{120}$$

حـــاول ما احتمال أن تكون إحدى الكرات على الأكثر حمراء؟

التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

1 وضِّح العلاقة بين مخطَّط الشجرة والقانون الأساسي للعد.

2 وضِّح العلاقة بين القانون الأساسي للعد وحساب عدد التراتيب.

تمارين موجَّهة

3 تقضي التجربة العشوائية برمي 3 قطع نقود معدنية متشابهة. استعمل مخطَّط الشجرة لإيجاد جميع مُخرَجات هذه التجربة. واستعمل المخطَّط لحساب احتمال أن تظهر الصورة على وجهَي قطعتَيْن على الأقل.

4 قصد أحد الأشخاص معرضًا للسيارات لشراء سيارة. وجد في المعرض سيارات من نوع فورد ومرسيدس وتيوتا. ويوجد من كل نوع سيارات بيضاء وسوداء وفضية. استعمل مخطَّط الشجرة لإيجاد احتمال أن يشتري سيارة مرسيدس.

5 كم عددًا من 3 أرقام يُمكنك أن تُكوِّن باستعمال جميع الأرقام ما عدا 0؟

6 يحتوي صندوق على 11 كرة مرقَّمة من 1 إلى 11. جِد عدد الطرق لسحب 3 كرات في الحالات التالية:

أ مع إعادة ومع مراعاة الترتيب
ب مع إعادة ومع إهمال الترتيب
ج من دون إعادة ومع مراعاة الترتيب
د من دون إعادة ومع إهمال الترتيب

7 يحتوي صندوق على 13 كرة مرقَّمة من 1 إلى 13. تقضي التجربة العشوائية بسحب كرتين على التوالي. احسب احتمال أن تحمل الكرتان عددًا أقل من 10 في حال إعادة الكرة الأولى إلى الصندوق قبل سحب الكرة الثانية، وفي حال عدم إعادتها.

8 يحتوي كيس على 7 كرات سوداء وَ 3 كرات حمراء. تقضي التجربة العشوائية بسحب كرتين معًا. ما احتمال أن تكون الكرتان سوداوين؟

9 تتألّف كلمة السر للدخول إلى البريد الإلكتروني من 5 أحرف إنجليزية. وضع شيراز في كيس أوراقًا متشابهة تحمل كل منها حرفًا من حروف الأبجدية الإنجليزية وعددها 26، ثم سحب 5 أوراق. ما احتمال أن تكون هذه الأحرف أحرفًا متتالية وفق الترتيب الأبجدي؟

10 يحتوي صندوق على 9 كرات حمراء وَ 4 كرات سوداء، كلُّها متماثلة إلا باللون. تقضي التجربة العشوائية بسحب 3 كرات معًا. ما احتمال أن تكون كرتان على الأكثر من الكرات الثلاث سوداوين؟

تمارين وتطبيقات

11 عدد طلاّب الصف الحادي عشر 40 طالبًا. نجح 25 منهم في امتحان الرياضيات، وَ 28 في امتحان اللغة الأجنبية، وَ 15 طالبًا في الامتحانَيْن معًا. تقضي التجربة العشوائية باختيار أحد طلاّب الصف بالقرعة. ما احتمال أن يكون هذا الطالب ممَّن:

أ نجحوا في امتحان الرياضيات فقط.

ب نجحوا في امتحان اللغة الأجنبية فقط.

ج نجحوا في الامتحانَيْن.

د لم ينجحوا في أيّ من الامتحانَيْن.

12 أنشئْ مخطَّط شجرة لإيجاد جميع الأعداد المكوَّنة من رقمَيْن مختلفَيْن، والتي يُمكنك تركيبها باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، 5.

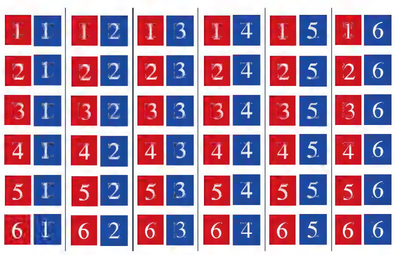
13 إذا وضعت في صندوق 5 كرات مرقَّمة من 1 إلى 5 وسحبت كرتَيْن على التوالي مع إعادة الكرة الأولى إلى الصندوق قبل سحب الثانية، فما احتمال أن تسحب كرتَيْن تحملان الرقم نفسه؟

14 يحتوي صندوق على 18 مصباحًا كهربائيًّا بينها 5 مصابيح غير صالحة. تقضي التجربة بسحب مصباحَيْن من الصندوق: الواحد بعد الآخر من دون إرجاع المصباح الأول إلى الصندوق قبل سحب المصباح الثاني. ما احتمال:

أ أن يكون المصباحان غير صالحين؟

ب أن يكون أحدهما على الأقل صالحًا؟

15 ما احتمال أن تحصل على الكتابة مرَّتين والصورة مرَّتين عند رمي قطعة نقود معدنية 4 مرات متتالية؟



16 تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّبَي أعداد أحدهما أحمر والثاني أزرق، ثم تدوين مجموع العددين الظاهرين.

احسب كل احتمال.

أ أن يكون المجموع عددًا فرديًّا أو أكبر من 11.

ب أن يكون المجموع عددًا زوجيًّا أصغر من 8.

ج أن يكون المجموع عددًا فرديًّا من رقم واحد.

17 في لعبة «معركة بحرية» يملك كل لاعب في البدء مدمِّرة وبارجة وغوّاصة وسفينة تموين وحاملة طائرات موضوعة على لوحة مربَّعة تتألف من 100خانة. يُبيِّن الجدول أدناه عدد الخانات التي تحتلها كل قطعة على اللوحة.

ما احتمال ألاّ يُصيب اللاعب الأول في ضربته الأولى أيًّا من قطع اللاعب الثاني؟

القطعة	عدد الخانات
المدمِّرة	2
البارجة	3
الغوّاصة	3
سفينة التموين	4
حاملة الطائرات	5

18 رمى آزاد 5 أحجار نرد وحصل على ما هو ظاهر في الصورة المقابلة. قرّر الاحتفاظ بالمكعَّبات التي أظهرت 4 نقاط، ورمى المكعبين الآخرين من جديد.

أ ما احتمال أن يكون مع آزاد 5 مكعبات يُظهر كل منها 4 نقاط؟

ب ما احتمال أن يكون معه 4 مكعَّبات على الأقل تُظهر 4 نقاط؟

ج ما احتمال أن يكون معه 3 مكعَّبات فقط تُظهر 4 نقاط؟

د ما هي العلاقة بين أجوبة الأسئلة أ وَ ب وَ ج؟

يحاول أحد الطلاّب أن يكسر كلمة السر التي تسمح بالدخول إلى حاسوب المدرسة. تتألف كلمة السر هذه من خمسة أرقام.

19 ما احتمال أن يتمكن الطالب من كسر كلمة السر إن كان مسموحًا تكرار الأرقام فيها؟

20 ما احتمال أن يتمكن الطالب من كسر كلمة السر إن لم يكن مسموحًا تكرار الأرقام فيها؟

21 ما احتمال أن يتمكن الطالب من كسر كلمة السر إن لم يكن مسموحًا تكرار الأرقام فيها ومجموع أرقامها يساوي 10؟

22 A وَ B حدثان في تجربة عشوائية واحدة. $P(A)=0.4$ وَ $P(B)=0.5$ في حين أن $P(A\cap B)=0.2$.

أ هل الحدثان مستقلان؟

ب جِد احتمال $P(A\cup B)$.

23 تتسابق ثلاثة جياد A وَ B وَ C. ما احتمال فوز كل حصان، علمًا بأن احتمال فوز A هو ضعف احتمال فوز B، واحتمال فوز B هو ضعف احتمال فوز C؟ ما احتمال فوز B أو C؟

24 زوجان في الستين من العمر. احتمال أن يصل الرجل إلى السبعين من عمره هو $\frac{1}{4}$، واحتمال أن تصل زوجته إلى السبعين من عمرها هو $\frac{1}{3}$.

أ ما احتمال أن يصلا معًا إلى السبعين؟

ب ما احتمال أن يصل أحدهما على الأقل إلى السبعين؟

ج ما احتمال ألاّ يصل أي منهما إلى السبعين؟

نظرة إلى الوراء

تم رمي مكعَّبي أعداد.

25 ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرَين 12؟

26 ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرَين أقلّ من 5؟

27 ما احتمال أن يكون أحد العددين الظاهرَين على الأقل فرديًّا؟

28 ما احتمال أن يكون أحد العددين الظاهرَين على الأقل أصغر من 5؟

نظرة إلى الأمام

29 تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّبي أعداد: الواحد تلو الآخر، وتدوين مجموع العددين اللذين أظهرهما المكعَّبان. ما المجموع الذي لا يتغيّر احتمال الحصول عليه، أيًّا يكن العدد الذي أظهره المكعَّب الأول؟ ما هو هذا الاحتمال؟

الفصل 2

الـــــدوالّ Functions

تُستعمل الدوالّ في مسائل الحياة اليومية عبر استعمال الكميّات في التعبير عن التغيّرات وعن علاقة بين متغيّرين. مثال على ذلك: يمكن تمثيل العلاقة بين سرعة دوران القطار في أفعوانيّة والقوة التي تثبِّت الركاب في مقاعدهم بواسطة دالّة.

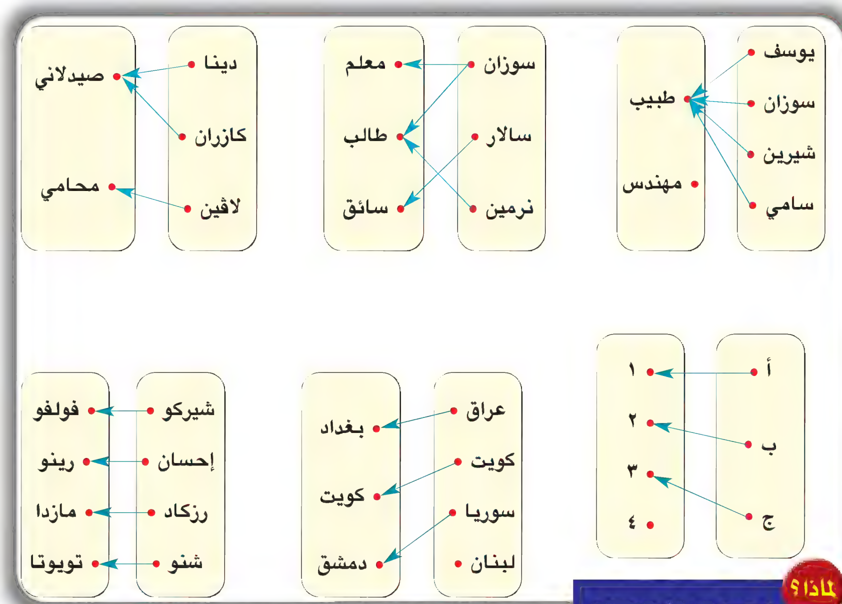
الدروس

كبير كالحوت

يعتبر الحوت المحدّب من أكبر الحيوانات في العالم. يُمكنك استعمال الدوال لمقارنة قياسات هذه الحيتان مع أشياء مختلفة.

الدرس 1

الـــــدوالّ Functions



لماذا؟

نستعمل الدوال والعلاقات عادة لبناء نماذج رياضية تُعبّر عن واقع حياتي أو قانون علمي.

الأهداف

- يمثّل بيانيًّا علاقة بين متغيّرين.
- يحدِّد مجال العلاقة ومداها.
- يقرِّر إن كانت العلاقة تشكِّل دالّة.
- يحسب قيمة دالّة عندما يأخذ المتغيِّر قيمة معيَّنة.

المفردات Vocabulary

علاقة Relation

متغيّر حر Indepenent Variable

متغيّر تابع Dependent Variable

جدول قيم Table of Values

مجال Domain

مدى Range

بيان Graph

دالة Function

صورة Image

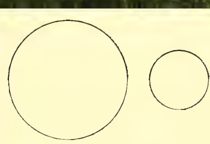
النشاط

العلاقات والدوالّ Relations and Functions

1. فتح سليم دفتر الهاتف ووجد فيه:

الاسم	رقم الهاتف
شكري دهوكي	235 246
هيوا سليمان	456 987
خسرو هوليري	852 369
خسرو هوليري	369 852
ڤيان كركوكي	741 236

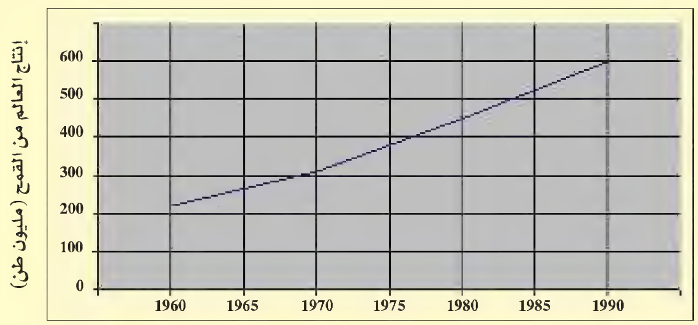
ما رقم هاتف ڤيان كركوكي؟ ما رقم هاتف خسرو هوليري؟



2. استعمل الحاسبة لإكمال الجدول التالي الذي يعطيك مساحة الدائرة بدلالة قيَم مختلفة لنصف قطرها، ثم أوضح كيف أكملت الجدول.

نصف القطر	1	1.5	4	0.5	0.75	3	0	2.5	10
المساحة	3.14								

3. يوضِّح الرسم البياني أدناه تطوّر الإنتاج العالمي للقمح في النصف الثاني من القرن العشرين محسوبًا بملايين الأطنان.



استخدم الرسم البياني لتقدير الإنتاج العالمي للقمح بغية إكمال الجدول التالي:

السنة	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
كمية إنتاج القمح							

4. يبيِّن الجدول التالي معدَّل درجات الحرارة في كركوك؛ خلال الأسبوع الأول من شهر يناير:

أيام الأسبوع	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
معدَّل الحرارة	26	24	23	20	22	24	26

كم كان معدّل الحرارة يوم الأحد؟ كم كان معدّل الحرارة يوم الأربعاء؟ يوم الخميس؟

إذا تفحَّصت الأمثلة الأربعة السابقة تلاحظ أن كلاًّ منها يتضمّن متغيِّرين، وأن قيَم أحد هذين المتغيّرين تحدِّد قيَم الآخر.

نقطة مراقبة √ 5. أكمل الجدول التالي محدِّدًا في كل مثال المتغيِّر الأوَّل الذي تحدِّد قيَمه قيم المتغيِّر الثاني:

المثال	المتغيّر الأول	المتغيّر الثاني
1		
2		
3		
4		

تتحدّث عن وجود **علاقة Relation** بين متغيِّرين x و y إذا كانت قيم أحدهما، x مثلاً، تحدِّد قيم الآخر، y. في هذه الحالة، تقول إن المتغيِّر الأول هو **المتغيِّر الحرّ Independent Variable** وأن الثاني هو **المتغيِّر التابع Dependent Variable**.

الدوالّ Functions

في المثال الأول، تتردّد في الإجابة عن السؤال: **ما رقم هاتف خسروهوليري** ؟ لأن المتغيِّر الحر، **الاسم**، تقابله قيمتان للمتغيِّر التابع. أما في الأمثلة الأخرى، فإنك لا تواجه هذه المشكلة لأن كل قيمة من قيَم المتغيِّر الحر تقابلها قيمة وحيدة من قيَم المتغيّر التابع.

تقول عن العلاقة بين المتغيّرين x و y أنها **دالّة Function** إذا قابلت كل قيمة a من قيَم المتغيِّر الحرّ x قيمة وحيدة b من قيَم المتغيِّر التابع y. هذه القيمة الوحيدة b تُدعى **صورة Image** a بالدالة.

نقطة مراقبة ادرس من جديد الأمثلة الأربعة، وحدّد في كل حالة إن كانت **العلاقة دالّة** أم لا، وعلِّل جوابك.

مثـــال

1 **هل تمثِّل معطيات الجدول دالّة؟ أوضح ذلك.**

أ)

قيَم المتغيِّر الحرّ	قيَم المتغيِّر التابع
1	−3.6
2	−3.6
3	4.2
4	4.2
5	10.7
6	12.1
7	52

ب)

قيَم المتغيِّر الحرّ	قيَم المتغيِّر التابع
3	7
3	8
3	10
4	42
10	34
11	18
52	52

الحــل

أ) تمثِّل معطيات الجدول الأول دالّة، فكل قيمة من قيَم المتغيِّر الحرّ تقابلها قيمة وحيدة من قيَم المتغيِّر التابع.

ب) لا تمثِّل معطيات الجدول الثاني دالّة، لأن القيمة 3 للمتغيِّر الحرّ تقابلها ثلاث قيم للمتغيّر التابع y هي 7 و8 و10. يمثّل الجدول (ب) علاقة فقط.

أشكال تعريف الدالّة Different ways to define a function

إذا نظرت إلى الأمثلة السابقة تلاحظ أن هناك عدة أشكال لتعريف الدالّة. يمكن تعريف الدالّة بواسطة:

1. جدول قيَم Table of Values تُعرَّف الدالّة في هذه الحالة بواسطة جدول من عمودين يحتوي الأول منهما على قيَم المتغيِّر الحرّ، والآخر على قيَم المتغيِّر التابع المقابلة لها، بحيث تُكتب قيمة المتغيِّر الحرّ وقيمة المتغيّر التابع المقابلة على الصف نفسه.

مثال: دالّة المثال 4.

لا تكون العلاقة المُعرّفة بواسطة جدول، دالّة، إذا احتوى عمود المتغيّر الحر على قيمة تُقابلها قيمتان مختلفتان للمتغيّر التابع.

من هنا فإن العلاقة المُعرّفة بواسطة جدول والواردة في المثال الأول ليست دالّة، لأن هناك قيمة للمتغيّر الحرّ (خسرو هوليري) تقابلها قيمتان مختلفتان للمتغيّر التابع (رقم الهاتف).

2. **قاعدة Rule**: تُعرَّف الدالّة بواسطة قاعدة أو قانون يعبّر عن قيمة المتغيّر التابع بدلالة المتغيّر الحرّ.

مثال: دالّة المثال الثاني حيث يتم التعبير عن قيمة المتغيّر التابع A (مساحة الدائرة) بدلالة المتغيّر الحرّ r (نصف القطر). هذه القاعدة هي $A(r)=\pi r^2$.

3. **رسم بياني أو بيان Graph**: تُعرّف الدالّة بواسطة رسم بياني أو بيان، بحيث تكون قيَم المتغيّر الحرّ على المحور الأول وقيَم المتغيّر التابع على المحور الثاني. يتمّ تحديد قيمة المتغيّر التابع المقابلة للقيمة x من قيَم المتغيّر الحرّ بأنها الإحداثيّ الثاني للنقطة الموجودة على الرسم البياني، والتي إحداثيّها الأول x.

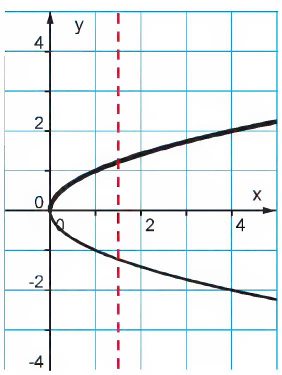
مثال: دالّة المثال الثالث.

اختبار المستقيم العمودي Vertical Line Test

إذا قطع مستقيم عموديّ رسمًا بيانيًّا في أكثر من نقطة، فإن هذا الرسم البيانيّ لا يمثّل دالّة.

مثـــــال

2 **هل العلاقة المُعرَّفة بواسطة الرسم البياني المقابل دالّة؟**



الحـــل

ليست العلاقة المعرَّفة بالرسم البياني المقابل دالة لأن كل قيمة موجبة x تقابلها قيمتان للمتغيّر التابع y، كما يبيّن ذلك المستقيم العمودي الذي يقطع الرسم البياني في نقطتين مختلفتين.

دراسة الدوالّ Studying Functions

لكي تدرّس دالّة ما، $f(x)$، عليك أن تقوم بما يلي:

1. تحديد مجموعة الأعداد الحقيقية للمتغيّر الحرّ x التي يمكن حساب صورتها $y=f(x)$. تُدعى هذه المجموعة **مجال تعريف الدالّة** أو باختصار **مجال الدالّة Domain**.
2. تحديد مجموعة الأعداد الحقيقية التي يغطّيها المتغيّر التابع، وتُدعى **مدى الدالّة Range**.
3. تمثيل الدالة بيانيًّا. وهذا يعني تمثيل جميع الأزواج المرّتبة (x,y) حيث ينتمي x إلى مجال الدالّة وحيث $y=f(x)$. تُدعى مجموعة النقاط هذه **الخط البياني** للدالّة أو **بيان الدالّة Graph**.
4. استخلاص خواص الدالّة عبر دراسة بيانها.

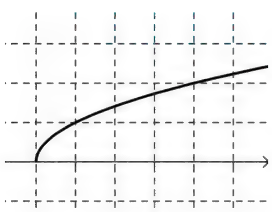
كيف تُنشئ بيان الدالّة؟

إذا كانت الدالّة مُعرَّفة بواسطة جدول قيم، مثِّلْ جميع النقاط (x,y) الواردة في الجدول، ثم صلْ بين هذه النقاط بخط مناسب.

إذا كانت الدالّة مُعرَّفة بقاعدة، أنشئ جدول قيَم للدالة ومثِّل نقاطه ثم أنشئ البيان بالطريقة السابقة. كما يمكنك استعمال حاسبة بيانيّة أو حاسوب لإنشاء بيان الدالّة.

التمــــــاريــــــن

التواصل في الرياضيات



1 أوضح الفرق بين الدالّة والعلاقة. أعطِ مثالاً على رسم بياني لعلاقة ليست دالّة.

2 اشرح ثلاث طرق لتعريف الدالّة.

3 أوضح كيف تحدِّد مجال الدالّة المُعرَّفة بالخط البياني المقابل، وكيف تُحدِّد مداها.

تمارين موجَّهة

هل يُعرِّف الجدول دالّة؟ أوضح ذلك.

4

x	y
5	3
8	4
5	7
9	2

5

x	y
0	3
1	8
2	8
3	–7

6

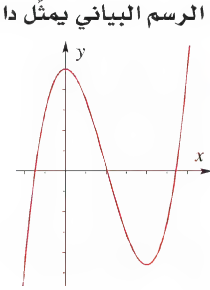
x	y
10	7
20	11
30	9
40	7

7

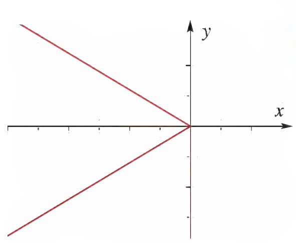
x	y
3	9
2	2
8	–3
2	1

حدِّد إن كان الرسم البياني يمثِّل دالّة أم لا، وعلِّل جوابك.

8



9

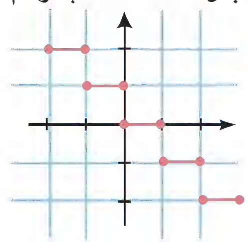


تطبيقات

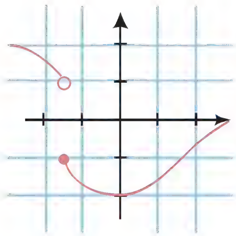
10 **سيّارات** يمثّل المتغيّر A السيّارات المرخّص لها بالسير في مدينتك. ويمثّل المتغيّر N اللوحات الرقمية لهذه السيارات. هل هناك علاقة بين A وَ N؟ إذا كان الجواب «نعم»، فهل هي دالّة؟ أيّ المتغيّرين هو المتغيّر الحرّ وأيّهما المتغيّر التابع؟ علّل جوابك؟

حدّد مجال الدالّة الممثّلة بالرسم البياني ومداها.

11



12



13 احسب قيمة الدالّة $f(x)=x^2+2x-1$ عندما $x=3$ ، وعندما $x=1.5$.

تطبيقات

14 **مدخول** يتقاضى سبّاك 24 ألف دينار عن كل ساعة عمل، بالإضافة إلى 20 ألف دينار للكشف عن الأعطال.

أ اكتب دالّة تمثّل دخل السبّاك R بدلالة عدد ساعات العمل x.

ب احسب دخل السبّاك إذا عمل 5.5 ساعات.

تمارين وتطبيقات

هل يُعرِّف الجدول دالّة؟ أوضح ذلك.

15

x	0	2	2	4
y	3	-5	1	7

16

x	1	2	3	4
y	6	6	9	9

17

x	4	4	6	6
y	-2	2	-3	3

18

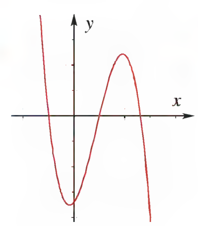
x	-5	-3	-1	1
y	8	8	-2	-2

19

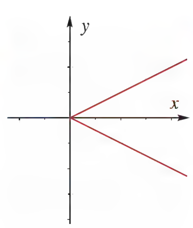
x	-2	-2	0	2
y	-5	-3	4	6

هل يمثّل الرسم البياني دالّة؟ أوضح ذلك.

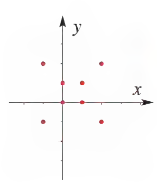
20



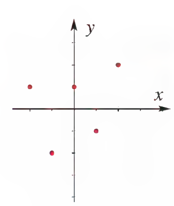
21



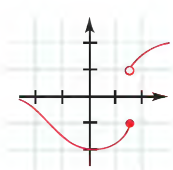
22



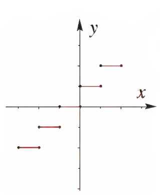
23



24



25



احسب قيمة الدالّة بالتعويض.

26 $f(x)=2x-6$ عندما $x=1$ وعندما $x=3$.

27 $f(x)=5-3x$ عندما $x=1$ وعندما $x=3$.

28 $f(x)=\frac{2x-1}{5}$ عندما $x=-9$ وعندما $x=1$.

29 $f(x)=\frac{x-4}{5}$ عندما $x=-9$ وعندما $x=9$.

30 $f(x)=2x^2-3x$ عندما $x=3$ وعندما $x=-2.5$.

31 $f(x)=x^2+4x-1$ عندما $x=2$ وعندما $x=1.5$.

32 $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ عندما $x=-1$ وعندما $x=\frac{3}{4}$.

33 $f(x)=-4x^2$ عندما $x=\frac{3}{2}$ وعندما $x=-2$.

أنشئ بيان الدالّة باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم حدّد مجالها ومداها.

34 $y=-\frac{x}{2}$ **35** $y=-\frac{2}{3}x-5$ **36** $y=-2x^2$ **37** $y=2$

38 $y=-6$ **39** $y=x^2$ **40** $y=x^2+2$

41 أنشئ الخط البياني لدالّة يكون مجالها $-3\le x\le 3$ ومداها $-5\le y\le 5$.

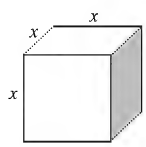
42 أنشئ الخط البياني لدالّة يكون مجالها $-2\le x\le 5$ ومداها $0\le y\le 4$.

تحــــــدٍّ

احسب قيمة الدالّة $f(t)=t^2-3$ في كل حالة.

43 $t=\sqrt{2}$ **44** $t=\sqrt{2}-1$ **45** $t=c+\sqrt{2}$

هندسة ارمز بالمتغيّر V إلى حجم المكعّب المقابل.



46 اكتب الدالّة التي تعطيك حجم المكعب V بدلالة طول ضلعه x .

47 احسب مساحة وجه من وجوه المكعّب عندما يكون حجمه 27m^3 .

48 **استهلاك** أعلن متجر لبيع الملابس تخفيضًا قيمته 30% على جميع الألبسة.

أ دفع دانا 47.25 ألف دينار ثمنًا لقميص في موسم التخفيضات. ما السعر القديم للقميص؟

ب اشترى زانا بنطالاً ثمنه 52 ألف دينار قبل موسم التخفيضات. ما ثمنه الجديد؟

نظرة إلى الوراء

49 يبيّن الجدول أدناه بالملايين أعداد الذين تركوا الدراسة وأعمارهم بين 21 سنة وَ 24 سنة.

أ ما احتمال أن يكون متخرِّج من مستوى ماجستير أو دكتوراه يعمل؟

ب ما احتمال أن يكون شخص جرى اختياره عشوائيًّا من مستوى قبل الثانوي ولا يعمل؟

عمالة المتخرّجين 21 - 24 سنة (ألف)		
المستوى التعليمي	يعملون	لا يعملون
قبل الثانوي	1.060	0.834
ثانوي	2.793	1.157
مهني	4.172	1.634
بكالوريوس	1.53	0.372
ماجستير أو دكتوراه	0.104	0.041

50 احسب المقدار $2 \div [7-(3-5)-2]3$ باستعمال تراتُب المعمليات.

نظرة إلى الأمام

51 أنشئ الرسم البياني للعلاقة $y=x^2-2x-10$ بين x وَ y. أوضح لماذا تمثّل هذه العلاقة دالّة. حدِّد مجال هذه الدالّة ومداها.

الدرس

2

الدوالّ الخطّية Linear Functions

لماذا؟

الدالّة الخطّية هي الأبسط بين الدوال الجبرية. كما أنها تُستعمل كثيراً في بناء نماذج رياضية لأوضاع في الحياة اليومية.

الأهداف

- يتعرّف الدالّة الخطّية.
- يستعمل الدالّة الخطّية لبناء نماذج رياضيّة.
- يحدّد مجال الدالّة الخطّية ومداها، ويحدِّد تقاطعاتها مع محورَي الإحداثيات.

تطبيقات

فيزياء

المفردات Vocabulary

دالة خطية Linear function

ميل Slope

النشاط

استكشاف الدالّة الخطّية Exploring linear function

تعرف أن درجة غليان الماء هي 100 درجة مئوية. لكنك قد تجهل أن 100 درجة مئوية هي درجة غليان الماء في مكان يقع عند مستوى البحر (أي إن ارتفاعه عن سطح البحر صفر). تتغيَّر درجة غليان الماء بتغيُّر ارتفاع المكان عن سطح البحر. فهذه الدرجة في جبال الهملايا تقل عن 100 درجة مئوية، بينما تزيد على 100 درجة مئوية في البحر الميت.

يُبيّن الجدول التالي مواقع في العالم وارتفاع كل منها، عن سطح البحر، ودرجة غليان الماء فيه.

الموقع	الارتفاع عن سطح البحر بالأمتار	درجة غليان الماء
جدّة	0	100
فريبورغ (سويسرا)	586	99.68
صوفر (لبنان)	1 250	99.135
كولورادو سبرنغز (أمريكا)	1 832	98.995
القرنة السوداء (لبنان)	3 220	98.23
البحر الميت	−420	100.23

1. مثِّل معطيات الجدول في المستوي الإحداثي محمِّلاً المحور الأول قيَم الارتفاع عن سطح البحر بالأمتار، والمحور الثاني درجات الحرارة على المقياس المئوي.
2. صل بين النقاط بقطع مستقيمة. ماذا تلاحظ؟
3. هل العلاقة بين الارتفاع عن سطح البحر ودرجة غليان الماء دالّة؟ أوضح ذلك.
4. استعمل الرسم البياني الذي حصلت عليه، لتقدير درجة غليان الماء على ارتفاع 3000m عن سطح البحر.
5. استعمل الرسم البياني الذي حصلت عليه، لتقدير ارتفاع مكان عن سطح البحر، علمًا بأن درجة غليان الماء فيه 97 درجة.
6. أين يقطع بيان الدالّة المحور الثاني؟ ماذا تمثِّل هذه النقطة؟

الدالّة الخطّية Linear Function

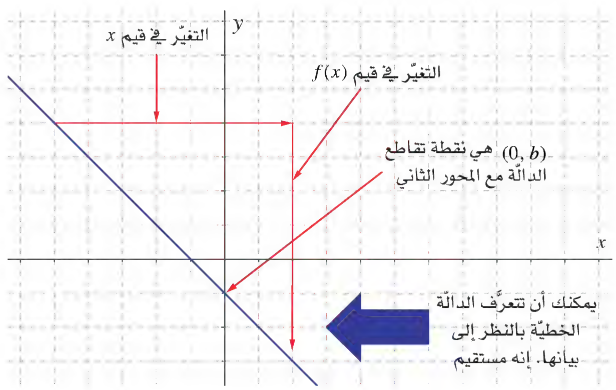
الدالّة الخطّية هي دالّة بيانها عبارة عن خطّ مستقيم.

تُكتب قاعدة الدالّة الخطّية على الشكل التالي: $f(x)=mx+b$

يمكنك استعمال الدوالّ الخطّية لبناء نموذج رياضي لبعض العلاقات بين متغيِّرين مثل العلاقة السابقة (الارتفاع عن سطح البحر ودرجة غليان الماء).

يمكنك أيضًا أن تنظر إلى نسبة تغيُّر قيمة الدالّة إلى تغيُّر قيمة المتغيِّر الحرّ. إنها ثابتة وتساوي ميل المستقيم.

$$m=\frac{f(x)\ \text{التغيُّر في قيمة}}{x\ \text{التغيُّر في قيمة}}$$

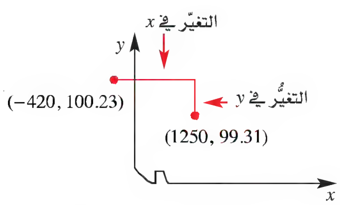


تبقى نسبة تغيُّر قيمة الدالّة الخطّية $f(x)$ إلى تغيُّر قيمة x ثابتة، وتُدعى هذه النسبة **ميل Slope** الدالّة الخطّية.

مثـــــال 1

أ استعمل معطيات الجدول في الصفحة السابقة لتشرح كيف تتغيَّر درجة غليان الماء عندما يتغيّر الارتفاع عن سطح البحر.

ب اكتب قاعدة لدالّة درجة غليان الماء بدلالة الارتفاع عن سطح البحر.



الحـل

أ استعمل x للدلالة على الارتفاع (بالأمتار) عن سطح البحرِ وَ y للدلالة على درجة غليان الماء بالمقياس المئوي. استعمل قيمتين للمتغيِّر الحر x وقيمتَي الدالّة المقابلتين لهما. مثلاً ارتفاع صوفر في لبنان والبحر الميت في الأردن. احسب نسبة تغيّر درجة غليان الماء إلى تغيّر الارتفاع عن سطح البحر للحصول على الميل.

$$m=\frac{\text{تغيّر الدالّة}}{x\ \text{تغيّر}}=\frac{99.31-100.23}{1250-(-420)}=0.00055$$

هذا يعني أن زيادة متر واحد في الارتفاع عن سطح البحر تؤدّي إلى تغيُّر في درجة غليان الماء مقداره -0.00055 درجة.

ب الارتفاع × m + درجة غليان الماء عند سطح البحر = درجة غليان الماء

$f(x)$ = 100 $+(-0.00055)x$

قاعدة الدالّة إذًا، $f(x)=100-0.00055x$

تفكير ناقد هل تزيد درجة غليان الماء إذا زاد الارتفاع عن سطح البحر أم تنقص؟ أوضح كيف تستعمل الجدول في أول الدرس للإجابة عن هذا السؤال. أوضح كيف تستعمل بيان الدالّة $f(x)=100-0.00055x$ للإجابة عن السؤال.

تحدٍّ وجدت ليلى قاعدة الدالة الخطية كما هو مبين في المقابل.
اشرح طريقة ليلى.
استعمل موقعين آخرين في الجدول لإيجاد قاعدة الدالة.
هل تحصل على القاعدة نفسها؟

$m=-0.00055$
$f(x)=mx+b$
$100=-0.00055(0)+b$
$100=b$
إذًا، قاعدة الدالّة هي:
$f(x)=-0.00055x+100$

مثال

2 احسب $f(9)$ حيث $f(x)=\frac{1}{3}x+17$. ما قيمة x إذا كان $f(x)=-1$ ؟

الحل

عوّض عن x بالقيمة 9.

$$f(9)=\frac{1}{3}\times 9+17$$
$$=3+17$$
$$=20$$

عوّض عن $f(x)$ بالقيمة -1 وحُلّ

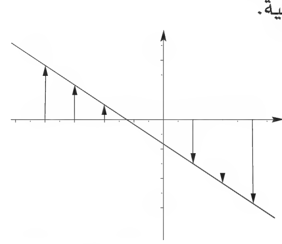
$$f(x)=\frac{1}{3}x+17$$
$$-1=\frac{1}{3}x+17$$
$$-18=\frac{1}{3}x$$
$$-54=x$$

تحدٍّ أوضح كيف تستعمل دالّة المثال 1 لكي تحدِّد درجة غليان الماء في موقع يرتفع 8000m عن سطح البحر. حدِّد هذه الدرجة.

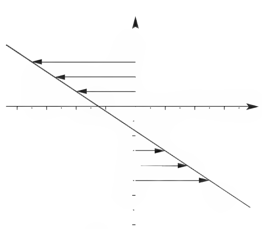
تحدٍّ أوضح كيف تستعمل دالّة المثال 1 لكي تحدِّد ارتفاع موقع عن سطح البحر تبلغ درجة غليان الماء فيه 85 درجة مئوية. حدِّد هذا الارتفاع.

دراسة الدالّة الخطّية Studying linear function

تسمح قاعدة الدالّة الخطّية $f(x)=mx+b$ بحساب قيمة الدالّة أيًّا تكن قيمة المتغيِّر x. ينتج من ذلك أن $f(x)$ معرّفة أيًّا كانت قيمة x، وأن مجالها، بالتالي، هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة. من ناحية أخرى، يمكن لكل عدد حقيقي أن يكون قيمة للدالّة الخطّية، لأنك تستطيع حساب قيمة المتغيِّر x، إذا عرفت قيمة الدالّة. ينتج من ذلك أن مدى الدالّة الخطّية هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة.



يُظهر بيان الدالّة الخطّية أن مجالها يغطّي المحور الأوّل بكامله.



يُظهر بيان الدالّة الخطّية أن مداها يغطّي المحور الثاني بكامله.

عندما تمثّل الدالّة حالة من الحياة اليومية، فمن شأن ذلك أن يحدّ من مجالها ومن مداها.

مثــــــال 3

تعتبر قمة إيفرست الواقعة في جبال الهملايا، والتي ترتفع 8848m عن سطح البحر، أعلى موقع على وجه الأرض. كما يُعتبر البحر الميت، والذي ينخفض 420m عن سطح البحر، أدنى موقع برّي على وجه الأرض. استعمل المعلومتين السابقتين لتحدّد بدقّة مجال دالّة المثال 1 ومداها.

الحــل

تشكّل دالّة المثال 1 نموذجًا رياضيًّا لحالة من الواقع. ينتج من ذلك أن المتغيِّر الحرّ x محدَّد بقيمٍ معيَّنة. فهو، بالاستناد إلى المعلومتين السابقتين، يتّخذ القيَم التي تقع بين -420 وَ 8848 لذا، فإن مجال دالة المثال الأول هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقِّق المتباينة $-420 \le x \le 8848$.
لكي نحدِّد مدى هذه الحالة، نلاحظ أن قيمتها تتناقص كلما ازدادت قيمة x. هذا يعني أن أعلى قيمة لها تقابل أدنى قيمة للمتغيِّر الحرّ، أي: $f(-420) = 100.23$ وأن أدنى قيمة لها تقابل أعلى قيمة للمتغيِّر x أي $f(8848) = 95.13$. هكذا، فإن مدى دالّة المثال الأول هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقّق $95.13 \le y \le 100.23$.

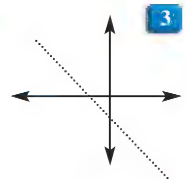
التمارين

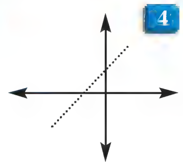
التواصل في الرياضيات

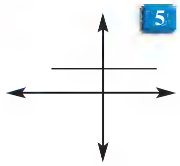
1 كيف تتحقَّق من أن نقطة تعرف إحداثيَّيها تقع على مستقيم تعرف معادلته؟

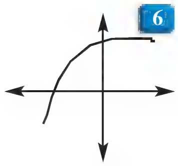
2 أوضح كيف تجد قاعدة دالّة خطيّة بمعرفة بيانها.

هل يُمثِّل الرسم البياني دالّة خطّية؟ أوضح ذلك.

3


4


5


6


تمارين موجّهة

هل الدالّة خطّية؟ أوضح ذلك.

7 $f(x) = 2 - x^2$

8 $f(x) = -3x - 6$

9 $g(x) = 4 + 10x$

10 $f(x) = x^3 - x$

11 $f(x) = \frac{3}{2}x + 4$

12 $g(x) = \frac{1}{x}$

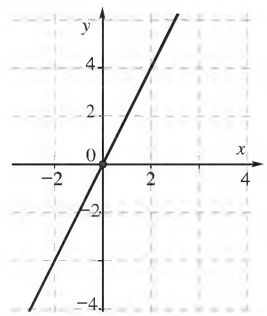
تطبيــــقات
رياضيات المستهلك

13 يبيِّن الجدول أدناه كلفة مخابرات الهاتف الدولية، بما فيها الرسم الثابت وقيمته ألفا دينار.

عدد الدقائق	1	2	3	4	5	6
الكلفة بالألف دينار	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00

استعمل الجدول لكي تكتب دالّة. حدِّد مجال هذه الدالّة ومداها.

14 يُظهر الشكل المقابل بيان دالّة خطّية.
أنشئ جدول قيَم لها، واكتب قاعدتها.



أكمل الزوج المرتَّب بحيث تقع النقطة على المستقيم $y=-4x+21$.

15 $(5, ?)$ **16** $(?, 9)$

17 $(0, ?)$ **18** $(?, 0)$

تمارين وتطبيقات

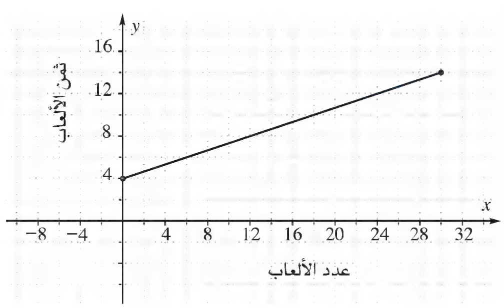
أكمل الزوج المرتَّب بحيث تقع النقطة على المستقيم $y=2x-14$.

19 $(8, ?)$ **20** $(10, ?)$ **21** $(0, ?)$ **22** $(?, 0)$

23 $(5, ?)$ **24** $(-5, ?)$ **25** $(3, ?)$ **26** $(?, 3)$

27 $(?, 6)$ **28** $(?, -4)$ **29** $(?, -7)$ **30** $(?, 10)$

31 **هندسة إحداثية** يبيِّن الرسم البياني العلاقة بين عدد الألعاب الإلكترونية (بين 0 وَ30) وثمنها. أنشئ جدول قيم لهذه الدالّة، واكتب قاعدتها.



32 **سيّارات** عندما تملأ خزان الوقود لسيارتك، فإن كمية الوقود في الخزان تشكّل دالّة متغيِّرها الحرّ هو عدد الدقائق. افترض أن الوقود الذي يصب في الخزان يتم بمعدَّل 18 لترًا في الدقيقة وأن سعة الخزّان تبلغ 35 لترًا.

أ اكتب قاعدة دالّة تمثّل كمّية الوقود التي تصبّ في الخزان بدلالة الزمن.

ب حدِّد مجال هذه الدالّة ومداها.

33 تسلية يبيع نادي الحياة أقراصًا مدمجة كما هو مبيَّن في الجدول التالي بما فيها رسم الانتساب للنادي والبالغ 35 الف دينار.

عدد الأقراص	0	2	4	6	8	10	12	14
الكلفة (ألف دينار)	35	51	67	83	99	115	131	147

اكتب دالّة تمثّل الأمر.

تحـــــدٍّ

34 تكنولوجيا استعمل حاسبة بيانيّة لرسم بياني دالتي التمرينين السابقين في المستوى الإحداثي نفسه. قارن بين العرضين. أي نادٍ يقدّم العرض الأفضل؟ أوضح ذلك.

نظرة إلى الوراء

أنشئ جدول قيَم لكلّ دالّة بالتعويض عن x بالقيم 1، 2، 3، 4، 5، 10. وارسم بيانها.

35 $y=2x+1$ **36** $y=5x-1$

احسب ذهنيًا القيمة العدديّة لكل مقدار.

37 $300-196$ **38** 10×30 **39** $\frac{480}{16}$ **40** $1\,000\times 1\,000$

نظرة إلى الأمام

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	4	9	16	25	36	49	64

41 ادرس الجدول أعلاه. هل يمثّل دالّة خطّية؟

42 اكتب قاعدة للعلاقة بين x وَ y. مثّل معطيات الجدول بيانيًّا وتحقّق من إجابتك السابقة.

الدرس 3

الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

Various forms of the equation of a line

لماذا؟

تؤدي معادلة المستقيم دورًا مهمًا في الرياضيات. إنها تمثل أبسط الدوال الجبرية. كما أنها تستعمل لبناء نماذج للكثير من مسائل الحياة.

الأهداف

- يتعرّف مختلف صور معادلة المستقيم.
- يكتب معادلة مستقيم على صورها المختلفة.

المفردات
Vocabulary

صورة الميل – التقاطع
Slope - Intercept form

صورة الميل – النقطة
Slope - Point form

التقاطع العمودي
y - Intercept

التقاطع الأفقي
x - Intercept

صورة النقطتين
Two - points Form

الصورة العامة
Standard Form

النشاط 1

معادلة المستقيم . صورة المَيل التقاطع   **Slope-Intercept Form**

قصد نوزاد شركة لتأجير السيّارات. ذكر له موظّف الشركة أن عليه دفع 100 ألف دينار عند تسلُّم السيّارة وَ 1.5 ألف دينار عن كل كيلومتر يقطعه.

1. أكمل الجدول التالي:

عدد الكيلومترات	10	20	30	
المتوجِّب دفعه	$1.5\times10+100$			

2. اكتب معادلة تمثِّل المبلغ y المتوجِّب دفعه بدلالة عدد الكيلومترات x.

3. مثِّل هذه المعادلة بيانيًّا.

تطبيقات
تجارة

صورة المَيل-التقاطع Slope - Intercept Form

معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع هي: $y=mx+b$ حيث يمثّل m وَ b عددين حقيقيين.
العدد m هو **مَيل المستقيم Slope** وَ b هو الإحداثيّ الثاني لنقطة تقاطع المستقيم مع المحور الثاني، أو **التقاطع العمودي y- intercept** للمستقيم.

مثـــــال 1

حدِّد ميل المستقيم وتقاطعه العمودي.

أ $y=3x-4$ ب $y=-5x+3$ ج $y=5$

الحـل

أ المَيل 3 والتقاطع -4.

ب المَيل -5 والتقاطع 3. ج المَيل 0 والتقاطع 5.

حـــاولْ ارسم المستقيم الذي يمثِّل المعادلة $y=2x-8$.

النشاط 2

صورة المَيل-النقطة Slope - Point Form

إذا عرفت ميل المستقيم m ونقطة يمر بها (h, k)، فإنك تستطيع أن تكتب معادلته.

1. معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع هي $y=ax+b$. ما العلاقة بين الميل m ومعامل x في هذه المعادلة؟

2. اكتب أن المستقيم يمر بالنقطة (h, k) بالتعويض عن x بقيمته h وعن y بقيمته k.

3. حُلّ المعادلة واستنتج قيمة b بدلالة m وَ h وَ k.

4. عوِّض عن b بقيمته، واكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع.

صورة المَيل-النقطة Slope - Point Form

معادلة المستقيم على صورة المَيل-النقطة هي $y-y_1=m(x-x_1)$ حيث

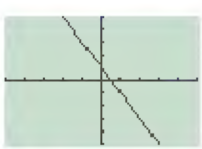
- m هو مَيل المستقيم.
- (x_1, y_1) نقطة يمر بها المستقيم.

مثـــــال 2

اكتب معادلة مستقيم مَيله -2 ويمر بالنقطة $(1,-1)$، ثم ارسمه.

الحـل

$$\begin{aligned}
y-y_1 &= m(x-x_1)\\
y-(-1) &= -2(x-1)\\
y+1 &= -2x+2\\
y &= -2x+1
\end{aligned}$$



حـــاولْ اكتب معادلة مستقيم مَيله 3 ويمر بالنقطة $(-2, -1)$، ثم ارسمه.

النشاط 3

صورة النقطتين Two Points Form

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(5, 3)$ وَ $(7, 4)$.

1. احسب ميَل المستقيم.
2. اكتب معادلته على صورة المَيل-النقطة ثم على صورة المَيل-التقاطع.

صورة النقطتين Two Points Form

معادلة المستقيم المار في النقطتين (x_1, y_1) وَ (x_2, y_2) هي

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

حـــاولْ اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(5, 65)$ وَ $(7, 71)$ على صورة المَيل-التقاطع.

الصورة العامة Standard Form

النشاط 4

الصورة العامة Standard Form

تطبيـــقات تسلية

حدّدت إدارة حديقة الحيوانات رسم الدخول بعشرة آلاف دينار للكبار وخمسة آلاف دينار للصغار. بلغت حصيلة يوم الأربعاء 350 1 ألف دينار.

1. استعمل x للدلالة على عدد الكبار وَ y للدلالة على عدد الصغار. اكتب معادلة تعبِّر عن أن حصيلة يوم الأربعاء كانت 350 1 ألف دينار.
2. أكمل الجدول لإنشاء أزواج مرتَّبة تحقِّق المعادلة.
3. مثِّل بيانيًّا المعادلة التي حصلت عليها باستعمال الأزواج المرتبة. ما شكل الرسم البياني؟
4. تحقّق من جوابك بخصوص شكل الرسم البياني عن طريق حل المعادلة لكتابة y بدلالة x.

نقطة مراقبة √

جدول قيَم

x	y
50	
	120
	70
120	

الصورة العامة Standard Form

معادلة المستقيم على الصورة العامة هي $ax + by = c$ حيث:

- a وَ b وَ c أعداد حقيقية.
- أحد العددين a وَ b على الأقل لا يساوي 0.

مثـــــال 3 اكتب كل معادلة مستقيم على الصورة العامة:

أ $y = -2x + 3$ ب $x = -13y + 4$ ج $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

الحـــل

أ $y = -2x + 3$

$2x + y = 3$

ب $x = -13y + 4$

$x + 13y = 4$

ج $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

$\frac{3}{4}x - 2 - 3y = 0$

$\frac{3}{4}x - 3y = 2$

هذه الصورة هي الصورة العامّة لأنها تُكتب $\frac{3}{4}x + (-3)y = 2$

مثـــــال 4

اكتب كل معادلة مستقيم على صورة المَيل-التقاطع.

أ $2y-2x=6$ ب $6x+4y=4$ ج $\frac{3}{4}y-6x=3$

الحل

أ
$$2y-2x=6$$
$$2y=2x+6$$
$$y=x+3$$

ب
$$6x+4y=4$$
$$4y=-6x+4$$
$$y=-\frac{3}{2}x+1$$

ج
$$\frac{3}{4}y-6x=3$$
$$\frac{3}{4}y=6x+3$$
$$y=8x+4$$

حـــاولْ اكتب المعادلة $y-23=5(x-4)$ على صورة المَيل-التقاطع، ثم على الصورة العامة.

المستقيمات الأفقية والعمودية Horizontal and Vertical Lines

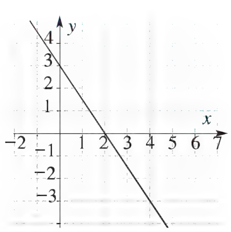
معادلة مستقيم أفقي هي $y=b$ حيث يمثِّل b تقاطع المستقيم مع المحور الثاني.
مَيل المستقيم الأفقي هو دائمًا 0.
معادلة مستقيم عمودي هي $x=b$ حيث يمثِّل b تقاطع المستقيم مع المحور الأول.
مَيل المستقيم العمودي غير معرَّف.

مختلف صور معادلة المستقيم Various Form of the Equation of a Line

اسم الصورة	شكل الصورة	مثال
المَيل-التقاطع	$y=mx+b$	$y=3x+5$
العامة	$ax+by=c$	$3x-2y=5$
المَيل-النقطة	$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-2=-3(x-1)$
النقطتين	$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$	$y-65=\frac{71-65}{7-5}(x-5)$

التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات



1 اكتب معادلة مستقيم مَيله m ويمر بنقطة الأصل.

2 كيف يتغيَّر المستقيم $y=mx+b$ عندما تتغيَّر قيمة b؟

3 كيف يتغيَّر المستقيم $y=mx$ عندما تتغيَّر قيمة m ؟

4 كيف تستعمل صورة المَيل-النقطة لكتابة معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(1, 1)$ وَ $(-2, 4)$ ؟

5 أوضح كيف تكتب معادلة المستقيم في الشكل المقابل.

6 كيف تكتب المعادلة $3x+3y+2=0$ على صورة المَيل-التقاطع؟

تمارين موجَّهة

اكتب كل معادلة مستقيم على الصورة العامة.

7 $y=3x+7$ **8** $2y=3x-4$ **9** $3x=-7y-17$

اكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع بمعرفة ميله ونقطة يمر بها.

10 الميل 2 النقطة $(3, 4)$

11 الميل -2 النقطة $(-3, 4)$

12 الميل $\frac{1}{3}$ النقطة $(3, -4)$

اكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع، وعلى الصورة العامة.

13 $y-50=8(x-4)$ **14** $3y=9x+15$ **15** $y=10(-4x+3)$

اكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع بمعرفة نقطتين يمر بهما.

16 $(5,-2)$ وَ $(-2, 5)$ **17** $(-3, 3)$ وَ $(-4, 4)$ **18** $(3, 2)$ وَ $(-3, -2)$

تمارين وتطبيقات

حدِّد تقاطع المستقيم مع محورَي الإحداثيات.

19 $y=4x+5$ **20** $y=8x-1$ **21** $y=-3x+5$

22 $y=-2x+13$ **23** $y=17x-4$ **24** $y=-5x-9$

25 $y+x=10$ **26** $3x-2y=12$ **27** $5x+4y=12$

28 $4x-5y=20$ **29** $2x-7y=14$ **30** $9x+y=18$

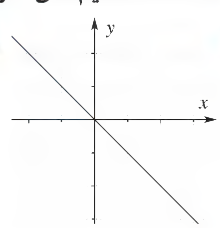
حدِّد مَيل المستقيم وتقاطعه مع المحور الثاني، من دون رسم.

31 $y=-5x$ **32** $y=-5x+3$ **33** $y=7$

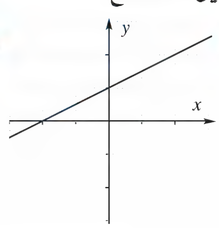
34 $x=7$ **35** $y=7-x$ **36** $y=\frac{1}{3}x-5$

اكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع.

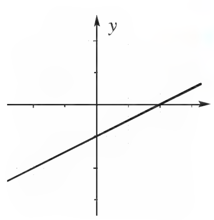
37



38



39



40 ما ميل مستقيم معادلته $6x+2y=40$ ؟

لا يمكن كتابة معادلة المستقيم $x=4$ على صورة المَيل-التقاطع لأن ميله غير مُعرَّف. لكن يمكن كتابتها على الصورة $1\times x+0\times y=4$. أكمل الجدول:

	المعادلة المعطاة	صورة المَيل-التقاطع	الصورة العامة
41	$x=1$		
42	$y=4$		
43	$x+y=5$		
44	$y=4x$		
45	$x=4y$		

تحدٍّ

46 ارسم المستقيمين $4x+2y=12$ وَ $2x+y=10$. ماذا تلاحظ؟

تطبيقات

47 **بيئة** افترض أن ارتفاع الماء في حوض هو 35cm، وأن هذا الارتفاع يزداد بمعدَّل 5cm يوميًّا. اكتب معادلة تمثِّل ارتفاع الماء h وعدد الأيام d. مثِّل هذه المعادلة بيانيًّا. بعد كم يوم يصبح ارتفاع الماء 260cm ؟

تطبيقات

48 **تجارة** ثمن تذكرة الدخول إلى حفل نهاية السنة الدراسيةً 5000 دينار للكبار وَ3000 دينار للصغار. اكتب معادلة تبيِّن حصيلة الحفلة التي بلغت 000 700 دينار، مستعملاً x للدلالة على عدد الكبار، وَ y للدلالة على عدد الصغار. ما ميل المستقيم الذي يمثِّل هذه المعادلة؟ وما تقاطعه مع المحور الثاني؟

نظرة إلى الوراء

49 اكتب قاعدة حساب محيط الدائرة P بدلالة نصف قطرها r، ثم استعمل هذه القاعدة لتحسب محيط دائرة شعاعها 8cm استعمل العدد 3.14 قيمة تقريبية للعدد π .

انسخ الجدول ثم أكمله. اكتب الكسور على أبسط صورة.

تطبيقات

	الصورة الكسرية	الصورة العشرية	العدد كنسبة مئوية
50		$0.\overline{3}$	$33\frac{1}{3}\%$
51		0.875	
52			2%
53	$\frac{1}{20}$		
54			$12\frac{1}{2}\%$
55	$\frac{2}{3}$		
56	$\frac{1}{6}$		
57			0.01%
58		0.80	
59	$\frac{2}{5}$		

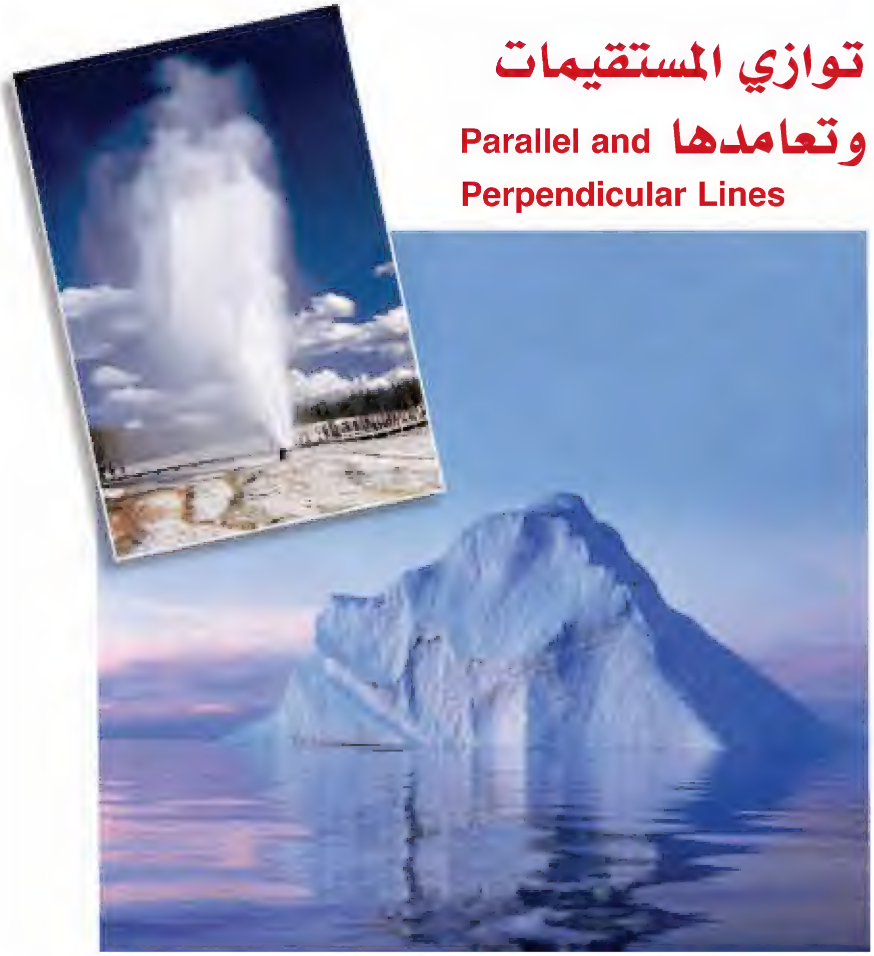
نظرة إلى الأمام

60 ارسم، في المستوى الإحداثيّ نفسه، المستقيمين $y=2.12x-3.7$ وَ $y=x+5.4$. حدِّد إحداثيي كل نقطة تقاطع ممكنة بينهما.

الدرس 4

توازي المستقيمات وتعامدها

Parallel and Perpendicular Lines



الأهداف

- يميِّز توازي مستقيمين أو تعامدهما بمقارنة مَيلَيهما.
- يكتب معادلة مستقيم موازٍ لمستقيم، أو متعامد معه.

لماذا؟ يشكّل تعرُّف المستقيمات المتوازية أو المتعامدة عن طريق مقارنة ميولها خطوة مهمة لتمييز العلاقات بين المستقيمات من دون اللجوء إلى رسمها.

تطبيقات
فيزياء

يبدو الماء بمظاهر مختلفة وفقًا لدرجات حرارته. فهو يتجمَّد على درجة حرارة منخفضة جدًّا كما يبيِّن ذلك جبل الثلج في الصورة، أو يتحوّل إلى بخار على درجة حرارة عالية كما يبيِّن ذلك البخار المتصاعد من الأرض.

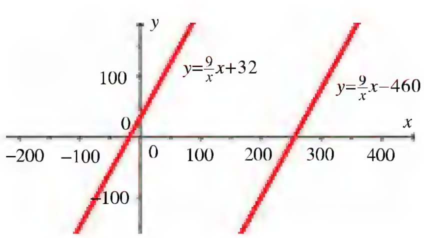
	فهرنهايت	مئوي	كالفن
غليان الماء	212	100	373
تجمّد الماء	32	0	273
الصفر المطلق	−460	−273	0

يبيِّن الجدول المقابل درجات حرارة على ثلاثة مقاييس: مقياس فهرنهايت والمقياس المئوي ومقياس كالفن. يتمّ تحويل درجات الحرارة من المقياس المئوي إلى مقياس فهرنهايت وفقًا للقانون $F=\frac{9}{5}C+32$ ومن مقياس كالفن إلى مقياس فهرنهايت وفقًا للقانون $F=\frac{9}{5}K-460$.

يمكنك إعادة كتابة هاتين المعادلتين باستعمال y عوضًا عن F وَ x عوضًا عن C أو K .

$y=\frac{9}{5}x+32$ وَ $y=\frac{9}{5}x-460$.

لاحظ أن المستقيمين اللذين يمثِّلان المعادلتين متوازيان، وأن مَيلَيهما متساويان.



المستقيمات المتوازية Parallel Lines

إذا تساوى مَيلا مستقيمين فإنهما يتوازيان.
إذا توازى مستقيمان غير عموديين فإن مَيلَيهما يتساويان.

مثال 1

اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم الموازي للمستقيم $y=3x-7$ والذي يقطع المحور الثاني عند 4.

الحل

مَيل هذا المستقيم هو 3. بما أنه يقطع المحور الثاني عند 4، فإن معادلته هي $y=3x+4$.

حاول اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم الموازي للمستقيم $y=0.5x+5$ والذي يقطع المحور الثاني عند -2.

تذكّر أن مستقيمين يتعامدان إذا تقاطعا وشكّلا زوايا قائمة. سوف تستكشف في النشاط التالي العلاقة بين مَيلَي مستقيمين متعامدين.

النشاط

استكشاف العلاقة بين تعامد المستقيمات والمَيل Slope of Perpendicular Lines

تحتاج في هذا النشاط إلى مسطرة قائمة وورقة بيانيّة عليها محورا المستوي الإحداثي.

1. هل يتقاطع المستقيمان $y=-2x+3$ وَ $y=0.5x-2$؟ أوضح ذلك.
2. ارسم هذين المستقيمين في المستوي الإحداثي نفسه وحدِّد بيانيًّا إحداثيي نقطة تقاطعهما.
3. ما العلاقة بين المستقيمين في رأيك؟ استعمل المسطرة القائمة لتتحقق من جوابك.
4. اضرب مَيل المستقيم الأول في مَيل المستقيم الثاني. ما ناتج الضرب؟

المستقيمات المتعامدة Perpendicular Lines

إذا كان ناتج ضرب مَيلَي مستقيمين -1، فإنهما يتعامدان.
إذا تعامد مستقيمان فإن ناتج ضرب مَيلَيهما -1.

مثال 2

اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم الذي يقطع المحور الثاني عند 4 ويتعامد مع المستقيم $y=3x+2$.

الحل

ميل المستقيم هو $-\frac{1}{3}$ لأنه يتعامد مع المستقيم $y=3x+2$ ذي المَيل 3. المعادلة المطلوبة هي $y=-\frac{1}{3}x+4$.

حاولْ اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم الذي يقطع المحور الثاني عند 6 ويتعامد مع المستقيم $y=4x+2$.

مثـــال

3 **اكتب، على صورة الميل-النقطة، معادلة للمستقيم المار بالنقطة $(4, 5)$ والمتعامد مع المستقيم $2x+3y=7$.**

الحـل

ابدأ بكتابة معادلة المستقيم المعطى على صورة المَيل-التقاطع: $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$. يجب أن يكون مَيل المستقيم المتعامد معه $\frac{3}{2}$. وبما أن معادلة المستقيم على صورة المَيل النقطة هي $y-y_1=m(x-x_1)$ ، فإن المعادلة المطلوبة هي $y-5=\frac{3}{2}(x-4)$.

حــاولْ اكتب، على صورة المَيل-النقطة، معادلة للمستقيم المار بالنقطة $(3, -2)$ والمتعامد مع المستقيم $4x-2y=-6$.

التمارين

التواصل في الرياضيات

1 أوضح كيف تكتب معادلة لمستقيم موازٍ للمستقيم $y=4x+3$.

2 مستقيم مَيله $\frac{2}{3}$. أوضح كيف تجد مَيل مستقيم متعامد معه.

3 كيف تحدِّد مَيل مستقيم متعامد مع المستقيم $y=\frac{1}{3}x+2$ ؟

4 أوضح كيف تجد معادلة مستقيم متعامد مع المستقيم $y=4x+3$.

تمارين موجّهة

اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة لمستقيم يقطع المحور الثاني عند 5 ويوازي المستقيم المعطى.

5 $y=2x+3$ 6 $y=-3x$ 7 $4y=x$ 8 $y=-6x+2$

اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة لمستقيم يقطع المحور الثاني عند 5 ويتعامد مع المستقيم المعطى.

9 $y=3x-3$ 10 $y=-3x$ 11 $5y=x$ 12 $-6y=x$

اكتب، على صورة المَيل-النقطة، معادلة للمستقيم المار بالنقطة $(4, 5)$ والمتعامد مع المستقيم المعطى.

13 $2x+3y=4$ 14 $x-3y=8$ 15 $-2x-8y=16$

تمارين وتطبيقات

حدِّد مَيل كل مستقيم.

16 $y=4x+10$ 17 $3x+y=7$ 18 $10=-5x+2y$

19 $4x-3y=12$ 20 $y=\frac{1}{3}x-3$ 21 $3x-y=7$

22 $2x-y=14$

23 $3x+2y=51$

24 $13=20x-5y$

25 $3y=-4x+2$

26 $\frac{2}{3}x+6y=1$

27 $4x+\frac{1}{4}y=8$

حدِّد مَيل مستقيم متعامد مع المستقيم المعطى.

28 $y=-\frac{1}{3}x+10$

29 $-\frac{1}{2}x-y=20$

30 $13=-x+y$

31 $3x+12y=12$

32 $y=5x+10$

33 $3x+y=2$

34 $20=-5x+2y$

35 $4x+4y=12$

36 $2y=5x+11$

37 $-4x+8y=17$

38 $12x+3y=10$

39 $4y=20x-3$

اكتب، على الصورة العامة، معادلة للمستقيم المار بالنقطة (2، 3) والموازي للمستقيم المعطى.

40 $x+y=1$

41 $3x=7y+2$

42 $y=2x-3$

43 $3y=2x$

44 $7x-2y=10$

45 $11=3y+2x$

اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم المحدَّد بحسب المعطيات.

	يمر بـ	موازٍ للمستقيم
46	$(3, -5)$	$5x-2y=10$
47	$(-2, 7)$	$y=3x-4$
48	$(2, 4)$	$y=7$
49	$(2, -4)$	$y=3x-4$
50	$(-1, 4)$	$y=2x+5$

	يمر بـ	متعامد مع المستقيم
51	$(3, -3)$	$5x+2y=10$
52	$(2, 7)$	$y=3x-4$
53	$(2, -4)$	$y=7$
54	$(-2, 4)$	$3x+y=5$
55	$(-1, 4)$	$y=2x-5$

ارسم المستقيم $y=5x$.

56 ارسم مستقيمًا موازيًا للمستقيم $y=5x$ واكتب معادلته.

57 ارسم مستقيمًا متعامدًا مع المستقيم $y=5x$ واكتب معادلته.

ماذا يمكنك أن تقول عن مَيل كلٍّ من المستقيمات التالية؟

58 موازٍ لمستقيم أفقي.

59 متعامد مع مستقيم أفقي.

60 موازٍ لمستقيم عمودي.

61 متعامد مع مستقيم عمودي.

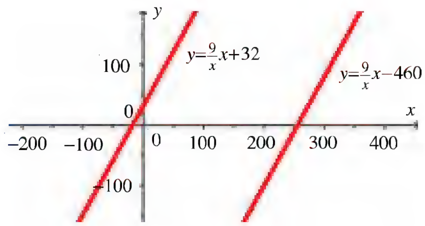
ربط هندسة **اكتب معادلات لأربعة مستقيمات تتقاطع لتشكّل مربّعًا تكون أضلاعه:**

62 موازية للمحورين الإحداثيين.

63 **هندسة** يقع أحد أضلاع مربّع على المستقيم $y=\frac{3}{4}x+5$. اكتب معادلات لمستقيمات يمكن أن تقع عليها الأضلاع الأخرى.

تطبيقات

64 **فيزياء** اكتب قانونًا لتحويل درجات الحرارة من مقياس فهرنهايت إلى المقياس المئوي، وقانونًا آخر لتحويلها من مقياس فهرنهايت إلى مقياس كالفن. اكتب هذين القانونين على صورة معادلتين، باستعمال x لدرجات الحرارة على مقياس فهرنهايت، وَ y لدرجات الحرارة على مقياس كالفن، أو المقياس المئوي. ارسم المستقيمين.



المعادلة $y=\frac{9}{5}x+32$ تحوّل من المقياس المئوي إلى مقياس فهرنهايت.

والمعادلة $y=\frac{9}{5}x-460$ تحوّل من مقياس كالفن إلى مقياس فهرنهايت.

تحدٍّ

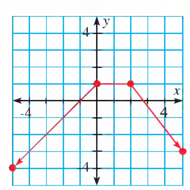
65 ما العلاقة بين المستقيمين في التمرين 64؟ اكتب مَيل كل منهما.

66 ما العلاقة بين المستقيمين في التمرين 64 والمستقيمين اللذين يمثّلان التحويل من مقياسي كالفن والمئوي إلى مقياس فهرنهايت؟

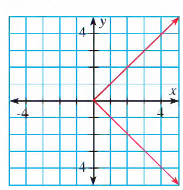
نظرة إلى الوراء

استعمل اختبار المستقيم العمودي لتقرّر إن كان الرسم البياني يمثّل دالّة.

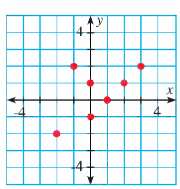
67



68



69



نظرة إلى الأمام

كم زوجًا مرتّبًا تشكّل حلاً لنظام من معادلتين خطّيتين بمجهولين إذا كان المستقيمان اللذان يمثّلان المعادلتين:

70 متوازيين؟

71 متعامدين؟

الدرس 5

الدوال التربيعيّة Quadratic Functions

الأهداف

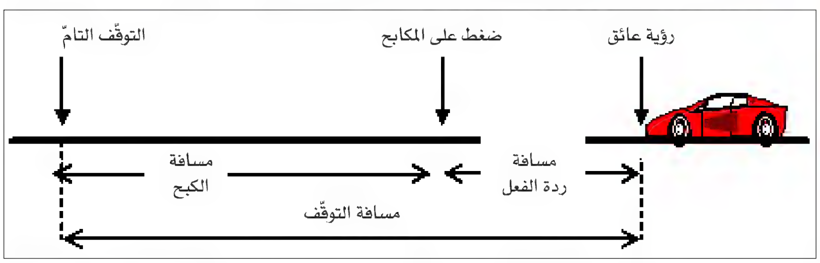
- يُميّز الدالّة التربيعية $f(x)=ax^2+bx+c$ ويمثّلها بيانيًّا.
- تمثيل الدالّة التربيعية بيانيًّا، ويستعمل اسم بيانها (القطع المكافئ)
- يميّز رأس القطع المكافئ ومحوره.
- يحدِّد بيانيًّا تزايد الدالّة وتناقصها.
- يحدِّد وجهة انفتاح القطع المكافئ وفقًا لإشارة المعامل a .

لماذا؟ يمكنك تمثيل الكثير من حالات الحياة اليومية بمقادير تربيعيّة. مثال ذلك: المسافة التي تقطعها سيارة يكبحها سائقها بدءًا من ملاحظة السائق لعائق أمامه وحتى التوقّف النهائي.

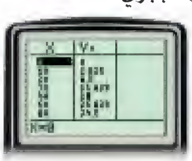
تطبيقات فيزياء

المقادير التربيعيّة Quadratic Expressions

تتألّف المسافة التي تقطعها سيارة يكبحها سائقها، بدءًا من ملاحظة السائق لعائق أمامه وحتى التوقّف النهائي، من مسافتين كما يبيّن ذلك الرسم التالي:



يمكنك التعبير عن المسافة التي تحتاج إليها السيارة للتوقّف بواسطة المقدار الجبري: $d(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{160}x^2$ ، حيث يمثّل المتغيّر x سرعة السيارة عند رؤية العائق (بالكيلومترات في الساعة) وَ $d(x)$ مسافة التوقّف النهائي (بالأمتار).



تكنولوجيا الحاسبة البيانية

يتكوّن المقدار $d(x)$ من مجموع المقدار $\frac{1}{5}x$ الذي يمثّل مسافة ردّة الفعل والمقدار $\frac{1}{160}x^2$ الذي يمثّل مسافة الكبح. إذا أنشأت جدول قيم للمقدار $d(x)$ باستعمال حاسبة بيانيّة فإنك تلاحظ أن المسافة اللازمة للتوقّف هي 25m تقريبًا عندما تكون السرعة 50km/h ، و 82m تقريبًا عندما تكون السرعة 100km/h . وهكذا تلاحظ أن المسافة اللازمة للتوقّف تضاعفت أكثر من 3 أمثال في حين السرعة تضاعفت مرتين.

تفكير ناقد هل العلاقة بين السرعة x ومسافة التوقف d علاقة خطّيّة؟ أوضح ذلك.

المقادير التربيعيّة Quadratic Expressions

المقادير التربيعيّة هي المقادير التي تُكتب على الشكل ax^2+bx+c حيث a وَ b وَ c أعداد حقيقيّة $a\neq 0$. تُدعى الأعداد a وَ b وَ c **معاملات *Coefficients*** المقدار التربيعي.

أبسط المقادير التربيعيّة هو المقدار x^2 . بصورة عامة، إذا ضربت مقدارًا خطّيًّا في مقدار خطّي آخر تحصل على مقدار تربيعي كما يبيّن ذلك النشاط التالي:

النشاط 1

المقادير التربيعيّة والمقادير الخطيّة Quadratic and Linear Expressions

1. أكمل الجدول التالي:

المقدار الأول	المقدار الثاني	ناتج ضرب المقدارين
$2x-2$	$2x+1$	$(2x-2)(2x+1)=4x^2-2x-2$
$x+1$	$x+1$	
$2x$	$-2x+1$	
$-x+2$	$0.5x+1$	

2. حدِّد معاملات المقدار التربيعي في كل حالة من السؤال السابق.

الدوال التربيعيّة Quadratic Functions

تعلّمت في الدرس الثاني من هذا الفصل الدوال الخطّية. سوف تتعلم في هذا الفصل نوعًا جديدًا من الدوال هو **الدوال التربيعية**. تذكّر أن الصورة العامة للدالّة الخطّية هي $f(x)=mx+b$. إنها مُعرَّفة بمقدار جبري خطي بينما تُعرَّف الدالّة التربيعيّة بمقدار تربيعي.

الدالّة التربيعيّة Quadratic Function

الدالّة التربيعيّة هي دالّة تُكتب قاعدتها بواسطة مقدار تربيعي في متغيّر واحد. أي إنها تُكتب على الصورة التالية: $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a وَ b وَ c تمثّل أعدادًا حقيقيَّة وَ $a\neq 0$. تُدعى الأعداد a وَ b وَ c **معاملات** الدالّة التربيعيّة.

أبسط الدوال التربيعيّة هي الدالّة $f(x)=x^2$. ويمكنك توليد جميع الدوال التربيعيّة انطلاقًا من هذه الدالّة باستعمال تحويلات بسيطة أو مركّبة. فهي، لهذا السبب، تشكّل **الدالّة الأم** لجميع الدوال التربيعيّة. تشكّل الدالّة $d(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{160}x^2$ مثالاً على دالّة تربيعيّة.

تفكير ناقد ما معاملات الدالّة التربيعيّة التي تمثّل مسافة توقُّف السيّارة؟

مثـــــال 1 **بيّن أن الدالّة** $f(x)=(2x-1)(3x+5)$ **دالّة تربيعيّة، وحدّد معاملاتها** a **و** b **و** c.

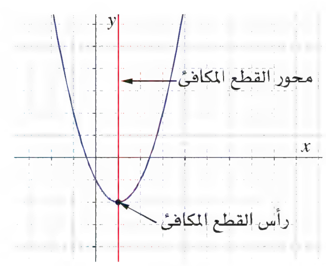
الحــل

طريقة أولى	طريقة ثانية
$f(x)=(2x-1)(3x+5)$	$f(x)=(2x-1)(3x+5)$
$=2x(3x+5)-(3x+5)$	$=(2x-1)3x+(2x-1)5$
$=6x^2+10x-3x-5$	$=6x^2-3x+10x-5$
$=6x^2+7x-5$	$=6x^2+7x-5$

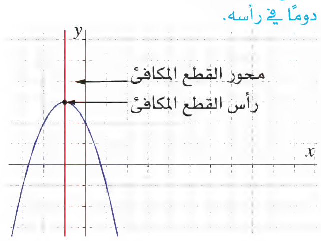
بما أن $f(x)=6x^2+7x-5$ فهي دالّة تربيعيّة ومعاملاتها هي $a=6$ ، $b=7$ ، $c=-5$.

حــــاولْ بيّن أن الدالّة $f(x)=(2x-5)(x-2)$ دالّة تربيعيّة وحدّد معاملاتها.

يحمل بيان الدالّة التربيعيّة اسمًا خاصًّا هو **القطع المكافئ** ***Parabola***. يُبيّن الشكل أدناه نوعين من القطوع المكافئة.



لاحظ أن محور القطع المكافئ يمرّ دومًا في رأسه.



لاحظ أن لكل قطع مكافئ نقطة مميزة تُدعى **الرأس** ***Vertex*** وأن له محور تناظر يقسمه إلى قسمين متطابقين. لاحظ أيضًا أن رأس بيان الدالّة التربيعيّة يدلّ على قيمتها الكبرى أو قيمتها الصغرى. إذا أمعنت النظر في الدالّة التربيعيّة $f(x)=ax^2+bx+c$ يتبيّن لك أن حساب قيمة $f(x)$ ممكن أيًّا تكن قيمة x. هذا يدلّ على أن مجال الدالّة التربيعيّة يساوي مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة. أما مداها فهو، كما يبيّن الرسمان البيانيان السابقان، إما مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي لا تقلّ عن القيمة الصغرى للدالّة (في النوع الأول)، وإما مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي لا تزيد على القيمة الكبرى للدالّة (في النوع الثاني).

مثـــال 2 **هل يدلّ رأس الدالّة التربيعيّة $f(x)=x^2-x+1$ على قيمة صغرى أم على قيمة كبرى؟ يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة أو جدول قيم.**

الحل

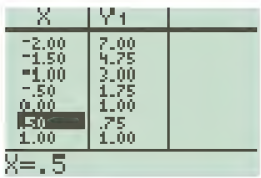
طريقة أولى

يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة لتكشف أن للدالّة قيمة صغرى.

إذا تتبّعت بيان الدالّة يبدو لك أن إحداثيي الرأس هما $(0.5, 0.75)$.

طريقة ثانية

يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة لإنشاء جدول قيم للدالّة. يبيّن جدول القيم أن الدالّة تبلغ قيمتها الصغرى عندما يأخذ x القيمة 0.5، وأن هذه القيمة الصغرى هي 0.75.



يظهر من هذا الجدول أن رأس القطع المكافئ هو النقطة $(0.5, 0.75)$.

تكنولوجيا

الحاسبة البيانية

حـــاولْ هل يدلّ رأس الدالّة التربيعيّة $f(x)=-2x^2-4x+1$ على قيمة صغرى أم على قيمة كبرى؟

يمكنك، بالنظر إلى إشارة المعامل a، أن تعرف إن كان للدالّة التربيعيّة $f(x)=ax^2+bx+c$ قيمة كبرى أو قيمة صغرى.

قيمة كبرى أم قيمة صغرى؟ Maximum and Minimum values

- بيان الدالّة التربيعيّة $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث تمثّل a وَ b وَ c أعدادًا حقيقيّة وَ $a \neq 0$ ، هو **قطع مكافئ**.
- إذا كان a، معامل x^2 ، موجبًا، فإن القطع المكافئ ينفتح نحو الأعلى ويشكّل رأسه أدنى نقطة فيه. كما يشكّل الإحداثي الثاني لهذا الرأس **القيمة الصغرى Minimum** للدالّة.
- إذا كان a، معامل x^2 ، سالبًا، فإن القطع المكافئ ينفتح نحو الأسفل ويشكّل رأسه أعلى نقطة فيه. كما يشكّل الإحداثي الثاني لهذا الرأس **القيمة الكبرى Maximum** للدالّة.
- يشكّل الإحداثي الثاني لرأس القطع المكافئ **قيمة قصوى Extremum** للدالّة التربيعيّة. هذه القيمة القصوى هي إما قيمة كبرى وإما قيمة صغرى.

مثـــال 3 **هل القطع المكافئ مُنفتح إلى أعلى أم إلى أسفل؟ هل يدلّ رأسه على قيمة كبرى أم على قيمة صغرى؟**

أ $f(x)=x^2+x-6$

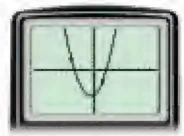
ب $f(x)=5+4x-x^2$

الحـــل

أ في الدالّة

$f(x)=x^2+x-6$ معامل x^2 هو 1. بما أنه موجب فإن القطع المكافئ مفتوح إلى الأعلى وللدالّة قيمة صغرى عند الرأس.

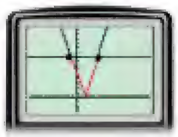
تحقّق



ب في الدالّة

$f(x)=5+4x-x^2$ معامل x^2 هو -1 بما أنه سالب فإن القطع المكافئ مفتوح إلى الأسفل وللدالّة قيمة كبرى عند الرأس.

تحقّق

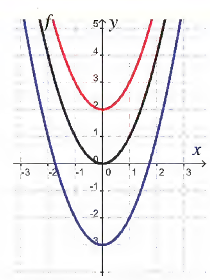


النشاط 2

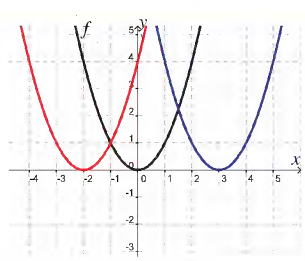
تحويل الدالّة التربيعيّة الأم Transforming Quatratic Parent Function

سوف تحتاج إلى ورق بيانيّ أو حاسبة بيانية.

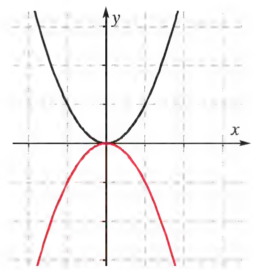
1. أنشئ جدول قيم، ثم ارسم بيان كل دالّة.
   $y=x^2$ $\quad$ $y=x^2+1$ $\quad$ $y=x^2-1$
2. كيف يتأثّر بيان الدالّة الأم إذا أضفت 1 إلى الدالّة أو أنقصته منها؟
3. أنشئ جدول قيم، ثم ارسم بيان كل دالّة.
   $y=x^2$ $\quad$ $y=(x+2)^2$ $\quad$ $y=(x-2)^2$
4. كيف يتأثّر بيان الدالّة الأم إذا أضفت 2 إلى المتغيّر الحرّ أو أنقصته منه؟ **نقطة مراقبة √**
5. أنشئ جدول قيم، ثم ارسم بيان كل دالّة.
   $y=x^2$ $\quad$ $y=(x-2)^2+1$ $\quad$ $y=(x-2)^2-1$ $\quad$ $y=(x+2)^2+1$
6. كيف يتأثّر بيان الدالّة الأم نتيجة إخضاعه للتحويل الناتج عن إنقاص 2 من x وإضافة 1 إلى الدالّة؟ عن إضافة 2 إلى x وإنقاص 1 من الدالّة؟ **نقطة مراقبة √**



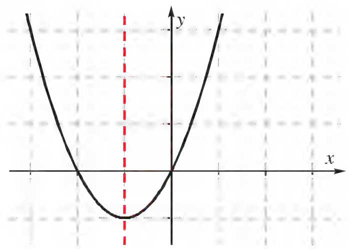
تمثّل كل من الدالّتين $y=x^2+2$ وَ $y=x^2-3$ **سحبًا عموديًا Vertical Translation** لبيان الدالّة الأم $y=x^2$. من شأن إضافة عدد إلى الدالّة أو إنقاصه منها، أن يسحب بيانها عموديًا إلى **أعلى** أو إلى **أسفل**.



تمثّل كل من الدالّتين $y=(x+2)^2$ وَ $y=(x-3)^2$ **سحبًا أفقيًا Horizontal Translation** لبيان الدالّة الأم $y=x^2$. من شأن إضافة عدد إلى المتغيّر الحرّ أو إنقاصه منه أن يسحب بيانها أفقيًا إلى **اليسار** أو **اليمين**.



يمثّل بيان الدالّة $y=-x^2$ عكسًا لبيان الدالّة التربيعيّة الأم حول المحور الأول. وبينما يدلّ رأس القطع المكافئ على قيمة صغرى للدالّة التربيعيّة الأم، يدلّ هذا الرأس على قيمة كبرى للدالّة $y=-x^2$.



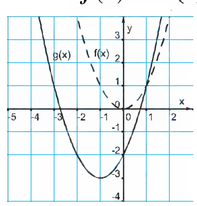
يشكّل المستقيم العمودي المارّ في رأس القطع المكافئ محور تناظر لهذا الخط البياني، لأن هذا المستقيم يقسم القطع المكافئ إلى جزءين متطابقين. يُدعى هذا المستقيم **محور القطع المكافئ Axis of Symmetry**.

مثـــــــال 4 **تحويل بيان الدالّة التربيعية**

كيف تُحوّل بيان الدالّة التربيعية الأم (الأساسية) $f(x)=x^2$ للحصول على بيان الدالّة.

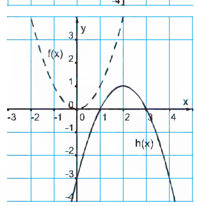
أ $g(x)=(x+1)-3$

بواسطة سحب وحدة واحدة إلى اليسار و 3 وحدات إلى أسفل.



ب $h(x)=-(x-2)+1$

بواسطة سحب وحدتان إلى اليمين يتبعه انعكاس حول المحور x ثم سحب إلى أعلى وحدة واحدة.



حـــاولْ كيف تُحوّل بيان الدالّة التربيعيّة الأم $f(x)=x^2$ للحصول على بيان الدالّة.

أ $g(x)=(x-2)+4$ ب $h(x)=(x+3)-2$

التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

1 أوضح الفرق بين بيان الدالّة الخطيّة وبيان الدالّة التربيعيّة.

2 أوضح الفرق بين المقدار الجبري الذي يُعرّف دالّة خطيّة والمقدار الجبري الذي يُعرّف دالة تربيعيّة.

3 كيف تعرف أن رأس القطع المكافئ يدلّ على قيمة صغرى أو قيمة كبرى للدالّة التربيعيّة؟

4 ما العلاقة بين بيان الدالّة التربيعيّة الأم وبيان الدالّة $y=x^2-8$ ؟

5 ما العلاقة بين بيان الدالّة التربيعيّة الأم وبيان الدالّة $y=(x-8)^2$ ؟

تمارين موجّهة

بيّن أن الدالّة هي دالّة تربيعيّة وحدّد معاملاتها.

6 $f(x)=(x+1)(x-7)$ 7 $f(x)=(x+2)(x+5)$ 8 $f(x)=(2x+5)(3x+1)$

قيمة كبرى أم قيمة صغرى؟ أجب عن السؤالين التاليين في التمارين من 9 إلى 14:

أ هل القطع المكافئ منفتح إلى أعلى أم إلى أسفل؟

ب هل القيمة القصوى للدالّة قيمة كبرى أم قيمة صغرى؟

9 $f(x)=x^2-3x+5$ 10 $f(x)=2-3x-x^2$ 11 $f(x)=x^2+5x+3$

12 $f(x)=x^2-2x+7$ 13 $f(x)=-x^2+8x+14$ 14 $f(x)=-2x^2-5x+1$

تمارين وتطبيقات

بيّن أن الدالّة هي دالّة تربيعيّة وحدّد معاملاتها.

15 $f(x)=(x-3)(x+8)$ 16 $f(x)=(4-x)(7+x)$

17 $f(x)=-(x-2)(x-6)$ 18 $f(x)=(2x+3)(4-x)$

19 $f(x)=x(x-3)$ 20 $f(x)=(x-6)(x+6)$

هل الدالّة دالة تربيعيّة أم لا؟ أوضح ذلك.

21 $y=3-x^2$ 22 $y=3-x$

23 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$ 24 $y=\frac{2x^2+5}{x+3}$

25 $y=x^2-x^2(x+7)$ 26 $y=|x^2+5x-2|$

هل القطع المكافئ منفتح إلى أعلى أم إلى أسفل؟ هل القيمة القصوى للدالّة قيمة صغرى أم قيمة كبرى؟

27 $y=2x^2-2x$ 28 $y=-8x^2-x$

29 $y=3-x^2$ 30 $y=4-x^2-2x$

كيف تُحوّل بيان الدالّة الأم للحصول على بيان كل دالّة.

31 $y=(x-2)^2-1$ 32 $y=(x-5)^2-2$

33 $y=-(x-2)^2+1$ 34 $y=-(x+6)^2-2$

35 $y=-(x-3)^2-2$ 36 $y=(x+4)^2-7$

37 **تحويلات** ارسم بيان الدالّة ثم أجب عن الأسئلة المطروحة.

أ $y=(x+2)(x-4)$ ب $y=2(x+2)(x-4)$

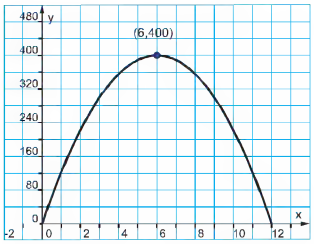
ج $y=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$ د $y=-(x+2)(x-4)$

هـ $y=-2(x+2)(x-4)$ و $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$

- بماذا تشترك هذه الخطوط البيانيّة الستّة؟
- أي منها منفتح إلى الأسفل؟
- أي منها منفتح إلى الأعلى؟

تطبيـــقات

فيزياء **يمثّل الخط البياني المقابل العلاقة بين الوقت محسوبًا بالثواني، وارتفاع قذيفة أطلقت نحو الأعلى، محسوبًا بالأمتار.**



38 ما أعلى ارتفاع وصلت إليه القذيفة؟

39 كم ثانية استغرقت القذيفة لتصل إلى الارتفاع الأعلى؟ ما محور هذا البيان؟

40 **فيزياء** أطلق جوامير سهمًا نحو الأعلى بسرعة 40 مترًا في الثانية. حدِّد ارتفاع السهم بعد 5 ثوانٍ، باستعمال الدالّة $y = 40x - 5x^2$ ، حيث يمثّل x الوقت بالثواني ويمثّل y الارتفاع بالأمتار. قرِّب جوابك إلى أقرب عشر.

نظرة إلى الوراء

يتضمّن المقدار $2(x-3)^2+1$ ضربًا وعملية داخل القوسين ورفعًا إلى قوّة بأس 2 وجمعًا.

41 أيٌّ من هذه العمليات عليك إجراؤها أوّلاً؟

42 أي منها عليك إجراؤها ثانيًا؟

43 أي منها عليك إجراؤها ثالثًا؟

اكتب كل معادلة على صورة الميل - التقاطع، ثم ارسم بيان الدالّة.

44 $2x+5y=14$

45 $x=-\frac{1}{2}y=4$

نظرة إلى الأمام

46 ارسم في المستوي الإحداثي نفسه، بيانات الدوال: $y=x^2-3x+5$ وَ $y=x^2+7x+6$ وَ $y=x^2-14x+49$. ما عدد النقاط المشتركة الممكنة للمحور الأول مع كل قطع مكافئ؟

الفصل

3

أنظِمَةُ المعادلات الخَطيَّة

Systems Of Linear Equations

الدروس

1. حل الأنظمة الخطّية بالتعويض
2. حل الأنظمة الخطّية بالحذف
3. حل الأنظمة الخطّية بيانيًا

تقاويم للإنقاذ

يُمكنك استعمال أنظمة المعادلات الخطّية لتخطيط عملية طبع وبيع تقاويم لجمع أموال، تُستعمل في الحفاظ على بعض أنواع الطيور المهدَّدة بالانقراض.

الدرس 1

حل الأنظمة الخطيَّة بالتعويض

Solving Linear Systems by Substitution

لماذا؟

غالبًا ما تحتاج أن تحل نظامًا من معادلتَين خطيتَين وتعطي الجواب المضبوط من دون تقريب. فالبائع في السوق يحتاج أن يحدد سعر كل سلعة بدقة بغية تحقيق الربح المرتجى.

تعرّفت في الصفوف السابقة أنظمة المعادلات الخطّية وقمت بحل بعضها. سوف تتعلَّم في هذا الصف عدَّة طرائق لحل مثل هذه الأنظمة. سوف تتعلَّم في البداية طريقة التعويض.

الأهداف

- يحلّ نظامًا من معادلتين خطيَّتَيْن بطريقة التعويض.

المفردات

Vocabulary

طريقة التعويض

Substitution Method

تطبيـــقات

سباق سيارات

النشاط

استكشاف طريقة التعويض — Exploring Substitution

شكّل سباق السيّارات الذي يجري في مدينة سبرنغ في الولايات المتحدة الأمريكية أحد أهمّ سباقات السيّارات. يقود كل سيّارة في هذا السباق فريق مؤلَّف من سائقَيْن يُتِمّ كل منهما عددًا من الدورات. حقَّق فريق آزاد ونوزاد 157 دورة بسيارته، وقد أتم نوزاد 21 دورة أقلّ من آزاد. كم دورة أتمَّ كلّ منهما؟

1. ابدأ بكتابة معادلات بغية إيجاد نموذج رياضي لحلّ المسألة. اختر المجهول x لتمثيل عدد الدورات التي أتمَّها آزاد، والمجهول y لتمثيل عدد الدورات التي أتمَّها نوزاد. سوف تحصل على نظام من معادلتَيْن خطّيتين بالمجهولَيْن x وَ y:
$$\begin{cases} x+y=157 \\ y=x-21 \end{cases}$$

حل المسائل

2. استعمل طريقة **خمّن وتحقّق** لتجد قيمتَي x وَ y اللتين تشكّلان حلاً لنظام المعادلتين.
3. انظر إلى المعادلة الثانية: $y=x-21$. كيف يمكنك استعمال هذه المعلومة حول y في المعادلة الأولى؟
4. $y=x-21$ ، عوّض إذن عن المجهول y في المعادلة الأولى بقيمته $x-21$ ، ثم حُلَّ المعادلة التي حصلت عليها لتجد قيمة x.
5. عوّضْ عن المجهول x في المعادلة الثانية بالقيمة التي وجدتها في السؤال السابق لحساب قيمة y.

نقطة مراقبة √

6. قارن قيمتَي x وَ y اللتَيْن وجدتهما مع القيمتَيْن اللتَيْن وجدتهما بطريقة **خمّن وتحقّق**. هل تتطابق هذه النتائج؟ أوضحْ ذلك.

إذا علمت قيمة أحد المجهولَين في نظام معادلتَين خطيّتَين، فإن بإمكانك أن تحلّ النظام بأن تعوِّض عن هذا المجهول بقيمته في إحدى المعادلتَين. هذه الطريقة لحل النظام تُدعى **طريقة التعويض** **Substitution method**.

مثـــــال **1** حُلّ النظام $\begin{cases} 8x+2y=19 \\ x=3 \end{cases}$ **بطريقة التعويض.**

الحــل

بما أن $x=3$ ، فيمكنك التعويض عن x في المعادلة الأولى بهذه القيمة:

حُلّ الآن المعادلة التي حصلت عليها لتجد قيمة المجهول y.

$$8(3)+2y=19$$
$$24+2y=19$$
$$2y=-5$$
$$x=-2.5$$

الزوج المُرتَّب $(3, -2.5)$ هو حلّ النظام.

تحقَّق من صحَّة ذلك بالتعويض عن x وَ y في المعادلة الأولى:

$$8(3)+2(-2.5)\stackrel{?}{=}19$$
$$24+(-5)\stackrel{?}{=}19$$
$$19=19$$ صواب

حـــاولْ حُلّ النظام $\begin{cases} 2y+3x=19 \\ y=5 \end{cases}$ بطريقة التعويض.

مثـــــال **2** حُلّ النظام $\begin{cases} 15x-5y=30 \\ y=2x+3 \end{cases}$ بطريقة التعويض.

الحــل

عوِّض عن y بقيمته $2x+3$ في المعادلة الأولى ثم حلّ المعادلة الناتجة.

$$15x-5(2x+3)=30$$
$$15x-10x-15=30$$
$$5x-15=30$$
$$5x=45$$
$$x=9$$

عوِّض عن x بالقيمة 9 في المعادلة الثانية ثم حُلّ المعادلة الناتجة.

$$y=2(9)+3$$
$$=18+3$$
$$=21$$

الحل هو الزوج المُرتَّب $(9, 21)$.

تحقَّق من صحّة ذلك بالتعويض عن x وَ y في المعادلتَين الأساسيّتَين.

$$15(9)-5(21)\stackrel{?}{=}30$$
$$135-105\stackrel{?}{=}30$$
$$30=30$$ صواب

$$21\stackrel{?}{=}2(9)+3$$
$$21\stackrel{?}{=}18+3$$
$$21=21$$ صواب

حـــاولْ حُلّ النظام بطريقة التعويض.

أ $\begin{cases} 2x+5y=14 \\ y=5 \end{cases}$

ب $\begin{cases} -3x+2y=31 \\ x=0.5y+6 \end{cases}$

مثــــــال 3

حُلَّ النظام $\begin{cases}3x+y=4\\5x-7y=11\end{cases}$ بطريقة التعويض.

الحــل

بغية استعمال طريقة التعويض، حُلَّ المعادلة الأولى لحساب قيمة y بدلالة x.

اختر المعادلة الأسهل للحل

$$3x+y=4$$
$$3x+y-3x=4-3x$$
$$y=4-3x$$

عوّض عن y في المعادلة الثانية بقيمته $4-3x$ ثم حل المعادلة الناتجة.

$$5x-7y=11$$
$$5x-7(4-3x)=11$$
$$5x-28+21x=11$$
$$26x-28=11$$
$$26x=39$$
$$x=1.5$$

عوّض عن x بالقيمة 1.5 في المعادلة الأولى ثم حُلَّ المعادلة الناتجة.

$$3(1.5)+y=4$$
$$4.5+y=4$$
$$y=-0.5$$

الحل هو الزوج المرتّب $(1.5, -0.5)$.

تحقّق من صحة ذلك بالتعويض عن x وَ y في المعادلتَيْن الأساسيّتَيْن.

تفكير ناقد لماذا قمت، في المثال 3، بحساب المجهول y بدلالة x مستعملاً المعادلة الأولى عوضًا عن حساب x بدلالة y؟

حــاولْ حُلَّ النظام $\begin{cases}6x-2y=11\\x+3y=4\end{cases}$ بطريقة التعويض.

مثــــــال 4

تطبيــقات
تجــارة

يبيع بيرود القُبَّعات في المباراة النهائية لكرة القدم. لديه 100 قُبَّعة من الموسم الماضي و300 قُبَّعة جديدة. يرغب بيرود في هذا الموسم أن يبيع جميع القُبَّعات التي لديه بقيمة 000 300 5 دينار. كم عليه أن يُحدِّد ثمن القُبَّعة الجديدة وثمن القُبَّعة القديمة ليحقِّق هدفه، علمًا بأن ثمن القُبَّعة الجديدة يزيد 000 7 دينار على ثمن القُبَّعة القديمة؟

الحــل

ابدأ باختيار المجهولَيْن. اختر المجهول d رمزًا لثمن القُبَّعة القديمة والمجهول n رمزًا لثمن القُبَّعة الجديدة.

اكتبْ نظام المعادلتَيْن الذي يشكِّل نموذجًا لحلّ المسألة: $\begin{cases}300n+100d=5\ 300\ 000\\n=d+7000\end{cases}$

عوِّض عن n في المعادلة الأولى بقيمته $d+7000$ ثم حُلَّ المعادلة الناتجة.

$$300(d+7000)+100d=5\ 300\ 000$$
$$300d+2\ 100\ 000+100d=5\ 300\ 000$$
$$400d+2\ 100\ 000=5\ 300\ 000$$
$$400d=3\ 200\ 000$$
$$d=8000$$

عوِّض عن d بالقيمة 000 8 في المعادلة الثانية، ثم حُلَّ المعادلة الناتجة.

$$n=8000+7000$$
$$n=15\ 000$$

الحل هو$(15000, 8000)$. على سعيد أن يبيع القُبَّعة الجديدة بسعر 000 15 دينار، والقديمة بسعر 000 8 دينار.

حــاولْ كم عليه أن يحدِّد ثمن كل نوع من القبّعات، لو كان يرغب في الحصول على 000 200 6 دينار؟

التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

1 إذا علمت أن $y = 42$ ، فكيف تستعمل التعويض لحلّ المعادلة $y = x + 8$ ؟

2 لديك المعادلتان $-4x + y = 2$ وَ $2x + 3y = 34$. اختر المجهول الأسهل والمعادلة الأسهل لتبدأ الحل بها، وبيِّن سبب اختيارك. حُلَّ.

3 أوضحْ كيف تستعمل التعويض لحل النظام $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$

تمارين موجَّهة

حُلَّ النظام بالتعويض، ثم تحقَّق من الحلّ.

4 $\begin{cases} 5x = 3y + 12 \\ x = 5 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

تمارين وتطبيقات

8 مجموع عددَيْن يساوي 27. أكبرهما يزيد 3 على الآخر. ما هما؟

حُلَّ كل نظام.

9 $\begin{cases} 2x + 8y = 1 \\ x = 2y \end{cases}$

10 $\begin{cases} x = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

12 $\begin{cases} y = 5 - x \\ 1 = 4x + 3y \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x + y = -92 \\ 2x + 2y = -98 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x + y = 4 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 6y = x + 18 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 5x + y = 2 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2y + x = 4 \\ y - x = -7 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 4y - x = 15 \\ y + x = 6 \end{cases}$

19 $\begin{cases} y = x - 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ -3x - 6y = -24 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 5x - 7y = 31 \\ -4x + 2y = -14 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 3x + y = 21 \\ 10x + 5y = 65 \end{cases}$

23 $\begin{cases} -3y = 9x + 24 \\ 6y + 2x = 32 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 12x + 4y = 22 \\ 3x - 8y = -10 \end{cases}$

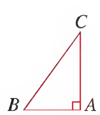
25 $\begin{cases} 11x + 4y = -17 \\ -6x + y = 22 \end{cases}$

26 $\begin{cases} -5x + 7y = -41 \\ 7x + y = 25 \end{cases}$

ربط

27 **هندسة** احسب طول مستطيل وعرضه، علمًا بأن محيطه يساوي 210m، وطوله يساوي ضعف عرضه.

28 **هندسة** مجموع قياسَي الزاويتَيْن B وَ C في المثلّث المقابل 90 درجة. احسب قياس كل زاوية من زوايا المثلّث علمًا بأن قياس الزاوية B ينقص 30 درجة عن ضعف قياس الزاوية C.



ربط

29 **نظرية الأعداد** العدد x يقل 4 عن ثلاثة أضعاف العدد y. إذا أنقصتَ ضعفي y من مجموع 3 مع ضعفي x تحصل على 11. ما هذان العددان؟

اكتب نظام معادلتَيْن خطّيّتَيْن لكلّ مسألة ثم حُلَّه.

30 **أعمال خيرية** أقامت جمعية العناية الخيرية حفلاً قدّمت خلاله المرطّبات لعدد من الراشدين والأولاد بلغ 210 أشخاص، وجمعت 935 ألف دينار. كان ثمن المشروب للراشد 6 آلاف دينار وللولد 3.5 آلاف دينار.

أ اكتب معادلة تُبيِّن كيف جُمِّع المبلغ بكامله.

ب اكتب معادلة تُبيِّن العدد الإجمالي للأشخاص.

ج حُلَّ نظام المعادلتَيْن الذي حصلت عليه. كم كان عدد الراشدين؟ وكم كان عدد الأولاد؟

31 **نافذة على الثقافة الصينية** تذكر مسألة صينية أن عددًا من الفلاحين تشاركوا في دفع ثمن أداة زراعية. إذا دفع كل منهم 8 قطع نقدية، زاد المبلغ المجمَّع 3 قطع عن المطلوب. وإذا دفع كل منهم 7 قطع نقدية، نقص المبلغ المجمَّع 4 قطع عن المطلوب. كم كان عدد الفلاحين وكم كان ثمن الأداة؟

نظرة إلى الوراء

32 تسلية في مسابقة للجري، تقدّم نسرين على شنو 20 مترًا، وتأخّر شنو 5 أمتار عن زيان الذي تأخَّر 10 أمتار عن بهار. بينما تقدَّم شرين على بهار 15 مترًا. كيف كان ترتيب المتسابقين؟

حُلَّ المعادلة.

33 $\frac{x}{15} = 3$ **34** $\frac{3}{x} = 15$

35 $\frac{15}{x} = 3$ **36** $\frac{x}{3} = 15$

37 42% من عدد يساوي 12.6. ما هذا العدد؟

نظرة إلى الأمام

استعمل التعويض لحلّ كل نظام. (لاحظ 3 معادلات بثلاثة مجاهيل).

38 $\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ y+3z=3 \\ z=2 \end{cases}$

39 $\begin{cases} 2x+3y+5z=44 \\ 2y-6z=4 \\ z=4 \end{cases}$

الدرس 2

حلّ الأنظمة الخطيّة بالحذف

Solving Linear Systems by Elimination

الأهداف

- يحلّ نظامًا من معادلتَيْن خطّيَّتَيْن بطريقة الحذف.

لماذا؟ يشكّل الحذف طريقة جديدة توفّر حلاً سريعًا لأنظمة المعادلتَيْن الخطيّتَيْن المعقّدة التي تصادفها في هذا الدرس.

تطبيقات
تأجير سيارات

المفردات
Vocabulary
طريقة الحذف
Elimination Method

يقوم مكتب هوار بتأجير السيّارات. يدفع السائح مبلغًا من المال عن كل يوم يستأجر فيه السيّارة، ومبلغًا آخر عن كلّ كيلومتر تقطعه السيارة. استأجر كل من الصديقين رزكار وزانا سيّارة من شركة هوار للقيام برحلة. دامت رحلة رزكار يومَيْن قطع خلالها 125km ، ودامت رحلة زانا 4 أيّام قطع خلالها 350km . دفع رزكار 250 287 دينار ، ودفع زانا 500 697 دينار. حدِّد أُجرة السيّارة في اليوم، وكلفة الكيلومتر.

يمكنك كتابة نظام معادلتَيْن خطِّيّتَيْن ثم حُلَّه لتحديد كلٍّ من المبلغَيْن.

ابدأ بتعريف المجهولَيْن اللذَيْن يرمزان إلى المبلغَيْن.

المجهول d: يرمز إلى أُجرة السيارة في اليوم.

المجهول k: يرمز إلى كلفة الكيلومتر.

انطلاقًا من المعلومات أعلاه. يمكنك أن تكتب نظام المعادلتين

$$\begin{cases} 2d+125k=287\ 250 \\ 4d+350k=679\ 500 \end{cases}$$

يمكنك بالطبع، أن تحلّ هذا النظام بطريقة التعويض. إلا أن ذلك ليس بالأمر اليسير. سوف تتعلم في هذا الدرس طريقة جديدة لحلّ أنظمة معقّدة.

النشاط

استعمال المعكوسات Using Inverses

سوف تحلّ نظام المعادلتَيْن $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 5x-2y=9 \end{cases}$

1. تتضمَّن المعادلتان حدَّين متعاكسَيْن. ما هما؟
2. استعمل خاصية الجمع للمساواة لتحصُلَ على معادلة انطلاقًا من المعادلتَيْن (اجمع $3x+2y$ مع $5x-2y$ وَ 7 مع 9). كم مجهولاً تتضمّن المعادلة الجديدة؟
3. حُلَّ المعادلة الجديدة لتحديد قيمة المجهول، ثم عوِّض عن هذا المجهول بقيمته في واحدة من المعادلتَيْن الأساسيَّتَيْن. حُلَّ المعادلة الناتجة من ذلك لتحديد قيمة المجهول الثاني .
4. تحقَّق من أن القيمتَيْن اللتَيْن حصلت عليهما للمجهولَيْن x وَ y تشكِّلان حلاً لنظام المعادلتَيْن.
5. أوضحِّ كيف تستعمل المعكوسات لحلّ نظام معادلات.

نقطة مراقبة √

طريقة الحذف Elimination Method

استعملت في النشاط السابق **طريقة الحذف Elimination Method** لحل نظام المعادلتَيْن.
تستعمل هذه الطريقة المعكوسات لحذف أحد المجهولَيْن.

مثـــــال 1

استعمل طريقة الحذف لحل النظام $\begin{cases} 3x+4y=7 \\ 2x-4y=13 \end{cases}$

الحــل

استعملْ خاصّية الجمع في المساواة لتحصل على معادلة تتضمَّن x فقط انطلاقًا من المعادلتَيْن. حُلَّ هذه المعادلة.

$$\begin{aligned} 3x+4y&=7 \\ 2x-4y&=13 \\ \hline 5x+0&=20 \\ 5x&=20 \\ x&=4 \end{aligned}$$

لاحظ أن $4y$ وَ $-4y$ متعاكسان

لتحديد قيمة y، عوِّض عن x بقيمته 4 في المعادلة الأولى.

$$\begin{aligned} 3x+4y&=7 \\ 3(4)+4y&=7 \\ 12+4y&=7 \\ 4y&=-5 \\ y&=-1.25 \end{aligned}$$

حلّ النظام هو$(4, -1.25)$.

عوِّض عن x بقيمته 4، وعن y بقيمته -1.25 في كلّ من المعادلتَيْن الأساسيَّتَيْن للتحقُّق من الحل.

$$\begin{aligned} 3(4)+4(-1.25)&\stackrel{?}{=}7 \\ 12+(-5)&\stackrel{?}{=}7 \\ 7&=7 \end{aligned}$$ صواب

$$\begin{aligned} 2(4)-4(-1.25)&=13 \\ 8-(-5)&=13 \\ 13&=13 \end{aligned}$$ صواب

لاحظ أن مُعاملي المجهول y في المعادلتَيْن متعاكسان، الأمر الذي يجعل حلّ هذا النوع من أنظمة المعادلات سهلاً.

حـــاولْ حُلِّ النظام بطريقة الحذف.

أ $\begin{cases} 3y-x=5 \\ 4y+x=9 \end{cases}$

ب $\begin{cases} 3y+2x=21 \\ 5y-2x=14 \end{cases}$

يتطلّب الأمر أحيانًا أن تضرب طرفي إحدى المعادلتين أو كلتيهما بعدد للحصول على متعاكسَيْن يسمحان بحذف أحد المجهولَيْن. يسهِّل هذا الأمر كون معامِل أحد المجهولين في إحدى المعادلتَيْن يساوي 1. لكن يمكنك تطبيق هذه التقنية على أنظمة أكثر تعقيدًا مثل نظام المثال 2.

مثـــال 2 **استعمل طريقة الحذف لحل النظام** $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x+7y=3 \end{cases}$

الحــل

اضرب طرفي المعادلة الأولى في 5 وطرفي المعادلة الثانية في 2− بغية الحصول على متعاكسَيْن.

$\begin{cases} (5)2x+(5)3y=(5)1 \\ (-2)5x+(-2)7y=(-2)3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 10x+15y=5 \\ -10x-14y=-6 \end{cases}$

استعمل الآن خاصّية الجمع للمساواة لتحصل على معادلة جديدة فيها مجهول واحد هو y، ثم حُلَّ هذه المعادلة.

$$\begin{aligned} 10x+15y&=5 \\ \underline{-10x-14y}&\underline{=-6} \\ y&=-1 \end{aligned}$$

عوّض الآن عن y بقيمته في المعادلة الأولى.

$$\begin{aligned} 2x+3y&=1 \\ 2x+3(-1)&=1 \\ 2x-3&=1 \\ 2x&=4 \\ x&=2 \end{aligned}$$

الحل هو $(2, -1)$.

تحقّق من الحل بالتعويض عن كلّ من المجهولَيْن بقيمته في كل من المعادلتَيْن.

$2(2)+3(-1)\overset{?}{=}1$ | $5(2)+7(-1)\overset{?}{=}3$

$4+(-3)\overset{?}{=}1$ | $10+(-7)\overset{?}{=}3$

$1=1$ صواب | $3=3$ صواب

حــاولْ استعمل طريقة الحذف لحلّ النظام $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$

مثـــال 3 **استعمل طريقة الحذف لحل المسألة التي طُرحت في أوّل الدرس** $\begin{cases} 2d+125k=287\ 250 \\ 4d+350k=679\ 500 \end{cases}$

الحــل

اضرب طرفي المعادلة الأولى في 2−. $\begin{cases} (-2)2d+(-2)125k=(-2)287\ 250 \\ 4d+350k=679\ 500 \end{cases}$

استعمل الآن خاصية الجمع للمساواة بغية الحصول على معادلة جديدة فيها مجهول واحد هو k، ثم حُلَّ هذه المعادلة.

$$\begin{aligned} -4d+(-250k)&=-574\ 500 \\ \underline{4d+\ \ 350k}&\underline{=\ \ 679\ 500} \\ 100k&=105\ 000 \\ k&=1050 \end{aligned}$$

عوِّض عن k بقيمته في المعادلة الأولى لتحديد قيمة d.

$$\begin{aligned} 2d+125(1050)&=287\ 250 \\ 2d+131\ 250&=287\ 250 \\ 2d&=156\ 000 \\ d&=78\ 000 \end{aligned}$$

حل نظام المعادلات السابق هو$(78\ 000;\ 1050)$. يمكنك التحقُّق من صحّته بالتعويض. أُجرة السيّارة في اليوم 78 ألف دينار، وكلفة الكيلومتر 1050 دينارًا.

حــاولْ حُلَّ كل نظام بطريقة الحذف.

أ) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 5x+7y=41 \end{cases}$

التمــــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

دُلَّ على الحدَّيْن المتعاكسَيْن في كل نظام واشرح كيف تحلُّه.

1 $\begin{cases} x+7y=13 \\ x-7y=5 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 5x+3y=20 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2a+b=6 \\ -2a-3b=8 \end{cases}$

تطبيقات

اشرح الخطوات الواجب اتّباعها لحلّ كل نظام بطريقة الحذف.

4 $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x+6y=7 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 9a+2b=2 \\ 21a+6b=4 \end{cases}$

تمارين موجَّهة

حُلَّ النظام بالحذف ثم تحقّق من الحل.

7 $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 4x+3y=13 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 3x+5y=-10 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x-4y=0 \end{cases}$

تمارين وتطبيقات

حُلَّ النظام بالحذف وتحقّق من صحة الحل.

11 $\begin{cases} -x+2y=12 \\ x+6y=20 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2a+3b=18 \\ 5a-b=11 \end{cases}$

13 $\begin{cases} -4x+3y=-1 \\ 8x+6y=10 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 5x-3y=11 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 2x=2-9y \\ 21y=4-6x \end{cases}$

16 $\begin{cases} -x-7=3y \\ 6y=2x-14 \end{cases}$

17 $\begin{cases} \frac{2}{3}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}y \\ y=3x-12 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 0.6x=3.2y+4.6 \\ 2.9y=0.3x+4.8 \end{cases}$

19 $\begin{cases} b=1.5k+4 \\ 0.8b+0.4k=0 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x=3y-12 \\ \frac{1}{3}x=4y+5 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 2x-7y=20 \\ 5x+8y=-1 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 2x-5y=-14 \\ -7x+4y=-5 \end{cases}$

23 $\begin{cases} 3x-2y=-26 \\ 5x+3y=9 \end{cases}$

24 $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y=-\frac{17}{15} \\ \frac{8}{5}x-\frac{7}{6}y=-\frac{3}{10} \end{cases}$

ربط

25 هندسة مستطيل محيطه 24m. طوله يساوي 3 أضعاف عرضه. ما طول المستطيل وما عرضه؟

اكتب نظام معادلتَيْن لكل مسألة. اختر الطريقة الفضلى لحلّ النظام. حُلَّ النظام وتحقَّق من صحَّة الحل.

تطبيـــقات

26 **رياضيات المستهلك** قرَّر أستاذ الرياضيات الاحتفال مع تلاميذه بذكرى ولادة عالم الرياضيات الخوارزمي. اشترى 3 فطائر بيتزا و3 علب عصير كبيرة لتلاميذ الشعبة الأولى ودفع 54 ألف دينار. واشترى 4 فطائر بيتزا وَ6 علب عصير كبيرة لتلاميذ الشعبة الثانية ودفع 78 ألف دينار . ما ثمن فطيرة البيتزا وما ثمن علبة العصير؟

27 **مدخول** يعمل بارام حارسًا في أحد مواقف السيّارات. يتقاضى أجرًا ثابتًا مقابل 15 ساعة عمل في الأسبوع وأجرًا إضافيًّا عن كل ساعة عمل إضافية. عمل عبدالحق 25 ساعة في الأسبوع الأول وتقاضى 720 ألف دينار، وعمل 22.5 ساعة في الأسبوع الثاني وتقاضى 641.25 ألف دينار. ما أجره الثابت وما أجر الساعة الإضافية؟

28 **تجارة** يبيع متجر الألحان أشرطة موسيقية من نوعين: أشرطة المنوّعات وأشرطة الموسيقى الكلاسيكية. يبلغ ثمن شريط المنوعات 21 ألف دينار، وثمن شريط الموسيقى الكلاسيكية 33 الف دينار. باع المتجر في أحد الأيام 25 شريطًا من النوعين، وكانت غلّته 693 ألف دينار. كم شريط منوّعات وكم شريط موسيقى كلاسيكية باع المتجر؟

29 **استئجار المنازل** يدفع مستأجر المنزل تأمينًا مع أجرة الشهر الأول. دفع جوامير 000 700 2 دينار في الشهر الأول وَ 000 850 20 دينار على مدار السنة. ما قيمة التأمين وما قيمة أجرة المنزل في الشهر؟

30 **سياحة** قدّم فندق البحر الأحمر عرضَيْن في عطلة نهاية الأسبوع. يتضمَّن العرض الأول ليلتَيْن وَ4 وجبات طعام بقيمة 615 ألف دينار ويتضمَّن العرض الثاني 3 ليالٍ وَ8 وجبات طعام بقيمة 1027.5 ألف دينار. ما كلفة الليلة الواحدة؟ وما كلفة وجبة الطعام؟

نظرة إلى الوراء

31 **نافذة على الثقافة الفرعونية** وجد علماء الآثار المسألة التالية على أوراق فرعونية: ثمن كيس يحتوي الأوزان نفسها من الذهب والفضة والرصاص 84 شعتة (وحدة نقد فرعونية). ما وزن كل من الذهب والفضة والرصاص في هذا الكيس إذا كان ثمن الدبن (وحدة وزن فرعونية) من الذهب 12 شعتة، وثمن الدبن من الفضة 6 شعتات، وثمن الدبن من الرصاص 5 شعتات؟

حُلَّ المعادلة.

32 $-5=-x+7$

33 $3x-2=2x+1$

34 $\frac{1}{2}x+3=2$

نظرة إلى الأمام

35 **تكنولوجيا** ارسم المستقيمَيْن $2x-3y=6$ وَ $4x-6y=18$ في المستوى الإحداثي نفسه. صف ما حصلت عليه. استعمل حاسبة بيانية إذا أمكن.

الدرس 3

حل أنظمة المعادلات الخطّية بيانيًّا

Solving Linear Systems Graphically

الأهداف

- يحلّ بيانيًّا نظامًا من معادلتين خطّيتين.
- يصنّف نظامًا من معادلتين خطّيتين.

لماذا؟

غالبًا ما تُستعمل أنظمة المعادلات الخطية لحل مسائل من الواقع، وبخاصة في الإدارة والاقتصاد. في بعض الحالات، لا يكون إيجاد الحل المضبوط مهمًّا، بل المطلوب إيجاد حلّ تقريبي. وفي بعض الأحيان يكون مطلوبًا النظر إن كان الحل موجودًا، وحيدًا أو متعددًا. في هذه الحالات، يساعدنا الحل البياني لنظام المعادلات الخطية على الإجابة عن السؤال المطروح.

حلَ أنظمة المعادلات الخطّية بيانيًّا Solving Linear Systems Graphically

المفردات
Vocabulary

نظام محدَّد
Independent System

نظام غير محدَّد
Dependent System

نظام مستحيل
metsyS tnetsisuocnI

تعلَّمت في الفصل السابق كيف تحلّ أنظمة المعادلات الخطّية باستعمال التعويض أو الحذف. غير أن كلاًّ من هاتين الطريقتين تتطلّب تحديد قيمة أحد المجهولين ثم تحديد قيمة الآخر. من ناحية ثانية، قد يتطلّب حلّ مسألة من الحياة اليومية إيجاد قيَم تقريبية للحلّ فقط، وقد يتطلّب الإجابة عن سؤال بسيط مثل: هل هناك حلول لنظام المعادلات؟ وما عددها في حالة وجودها؟ سوف تتعلَّم في هذا الدرس طريقة لحلّ هذه الأنظمة تؤمّن الإجابة السريعة عن مثل هذه الأسئلة.

النشاط 1

حل نظام معادلات خطّية بيانيًّا Solving Linear Systems Graphically

تلزمك حاسبة بيانية أو ورقة بيانية.

سوف تحلّ بيانيًّا النظام $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=-x+5 \end{cases}$

1. ماذا تقول عن النقطة (c, d) بالنسبة إلى المستقيمين $y=3x+1$ وَ $y=-x+5$ عندما يكون الزوج المرتَّب (c, d) حلاًّ لهذا النظام؟
2. ارسم كلاًّ من المستقيمين في المستوى الإحداثي نفسه.
3. أعطِ قيَمًا تقريبيّة لإحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين.
4. أعطِ حلاًّ تقريبيًّا للنظام.

نقطة مراقبة √

$)=a$